Medlemsblad nr 11

Under rubriken *Några rader från...* berättar inledningsvis föreningens ordförande om vad som är på gång i SMDF och svensk matematikdidaktik i övrigt.

Medlemmarna i SMDF inbjuds att till medlemsbladet skicka in kortare artiklar eller berättelser, som kan vara av intresse för föreningens medlemmar att ta del av. Den stora aktivitet som ägde rum under 2004 inom vårt område har fått en intensiv uppföljning detta år och detta nummer av medlemsbladet visar på en del av dessa aktiviteter.

Den 18 mars arrangerade SMDF i samarbete med Svenska matematikersamfundet och Sveriges matematiklärarförening en workshop om matematikens formelspråk. Några av bidragen presenteras i detta nummer av medlemsbladet: Christer Bergsten behandlar några didaktiskt centrala aspekter av formelspråket, Östen Dahl ger ett lingvistiskt perspektiv på temat, Christer Kiselman identifierar förutom formelspråket också ett ”matematikens fackspråk”, Håkan Lennerstad skriver om ett främlingskap i förhållande till ”matematiskan”, och Madeleine Löwing diskuterar problem när det gäller att kommunicera matematik i skolan. Se mer om vad som hände på workshopen på dess hemsida www.mai.liu.se/~chber/workshop. En mer fullständig dokumentation är planerad att utkomma i höst.

Vidare återges SMDF:s remissvar på Matematikdelegationens betänkande, sammanställt av Barbro Grevholm baserat på synpunkter framförda i den arbetsgrupp som utsågs på SMDF:s årsmöte. Slutligen annonserar Arne Engström den tredje nordiska konferensen om matematiksvårigheter.

/ Christer Bergsten

Några rader från…

Första halvåret 2005 har för många inom vårt ämnes- och forskningsområde inneburit ett intensivt arbete på många fronter. SMDF:s årsmöte ägde rum den 28 januari på Lärarhögskolan i Stockholm, där det förutom normala årsmötesförhandlingar även genomfördes en diskussion om de möjligheter som Matematikdelegationens betänkande kan leda till. En arbetsgrupp, bestående av Barbro Grevholm (ordf.), Christer Bergsten, Thomas Lingefjärd och Eva Norén, utsågs för att för utarbeta SMDF:s svar på remissen. Svaret sammanställdes sedan av Barbro Grevholm och lämnades till Utbildningsdepartementet och finns att läsa i detta nummer av medlemsbladet.

Under våren genomförde SMDF ett historiskt sett första samarrangemang med både Svenska matematikersamfundet (SMS) och Sveriges matematiklärarförening (SMaL), en workshop om matematikens formelspråk som ägde rum vid KTH i Stockholm den 18 mars. Det blev en trevlig och intressant dag där vitt skilda perspektiv och infallsvinklar på ämnet diskuterades. För er som inte var med finns nu möjlighet att ta del av några av bidragen i detta nummer av medlemsbladet. En fullständig dokumentation är planerad till hösten.

Vid några internationella aktiviteter under våren har medlemmar från SMDF varit aktiva, till exempel vid den fjärde europeiska konferensen CERME, som ägde rum i februari i Sant Feliu de Guixols vid Costa Brava i Spanien, och vid ICMI Study 15 i Águas de Lindóia i Brasilien i maj, som behandlade lärarutbildning i matematik. Även vid kommande konferenser i sommar, som t.ex. PME 29 och ALM i Australien, är Norden representerat. Det är glädjande att nordiska matematikdidaktiker börjar bli alltmer synliga i alltfler internationella sammanhang.

Sedan sist har ytterligare några licentiatavhandlingar i matematikdidaktik lagts fram och försvarats. Forskarskolan går efter sommaren in i sitt sista verksamhetsår, varför det är viktigt med en fortsatt fördjupad diskussionen om kvalitetsfrågor. Den nordiska forskarskolan ordnade ett tvådagars seminarium i Korsør i slutet av april, där handledare träffades och arbetade med kvalitetsfrågor med direkt koppling till doktorsavhandlingar. Nästa träff blir ett endagsmöte dagen före Norma05, den 1 september, för handledare av doktorander, och kommer att fokusera på handledningsfrågor med Uri Leron som inbjuden expert. Under hösten kommer också Ole Skovsmose att genomföra en utredning om kriterier för bedömning av licentiatavhandlingar inom RJ:s forskarskola.

Även vårt eget seminarium MADIF 5, som äger rum 24-25 januari 2006 i anslutning till Matematikbiennalen i Malmö den 26-27 januari, har frågor om kvalitet i sitt tema. Planeringen fortsätter och vi hoppas på aktivt deltagande från många av SMDF:s medlemmar i form av inskickade bidrag. Huvudföreläsare blir Werner Blum och Barbro Grevholm och i paneldebatten medverkar bland annat Gerd Brandell, Marit Johnsen Høines och Jeppe Skott. Vi ser fram emot en lika trevlig och inspirerande konferens som de tidigare. Vi har också mycket glädjande kunnat märka en efterfrågan på de konferensdokumentationer vi producerat.

Betydligt närmare i tiden ligger den nordiska konferensen NORMA 05, som äger rum i Trondheim 2-6 september. Det är ett rikt program som erbjuds, där det förutom de fem inbjudna plenarföreläsningarna accepterats trettiotre papers, nio ”short communications” och en workshop. Konferensen är viktig som ett led i det fina nordiska samarbete inom vårt område som fick en skjuts i början av 1990-talet och som förstärktes ytterligare genom arrangemanget av ICME 10 i Köpenhamn förra året.

Vid konferensen för lärarutbildare i matematik, LUMA’05 den 29-30 september (se webbsidan http://www.lhs.se/ukl/matematik/LUMA/), kommer SMDF som vanligt att ordna ett möte för medlemmarna. I förra numret av medlemsbladet efterlyste vi förslag till program vid detta möte och gör det här igen. Frågan hur lärarutbildningen ska kunna forskningsanknytas har till exempel lyfts fram av HSV:s utvärdering av landets lärarutbildningar. Hur ser det ut vid de olika högskolorna i denna fråga?

Från redaktionens sida saknar vi fortfarande en mer aktiv medverkan från SMDF:s medlemmar i form av debattinlägg, kortare eller längre artiklar och andra former av bidrag i medlemsbladet. Eftersom SMDF är en liten förening är det extra viktigt att alla medlemmar för fram sina synpunkter och idéer, det kan vara kommentarer till tidigare artiklar i medlemsbladet, inlägg i aktuell debatt om matematikutbildning och matematikdidaktisk forskning. Till exempel är revideringen av skolans kursplaner i matematik en angelägenhet där SMDF bör ta aktiv del.

Men nu är sommaren här och vi behöver alla en paus efter vårens intensiva arbete och semester för att samla ihop ny energi inför alla intressanta aktiviteter som väntar under hösten. Vi önskar alla medlemmar i SMDF en riktigt fin sommar!

.... från Barbro Grevholm, ordförande i SMDF
och Christer Bergsten, vice ordförande

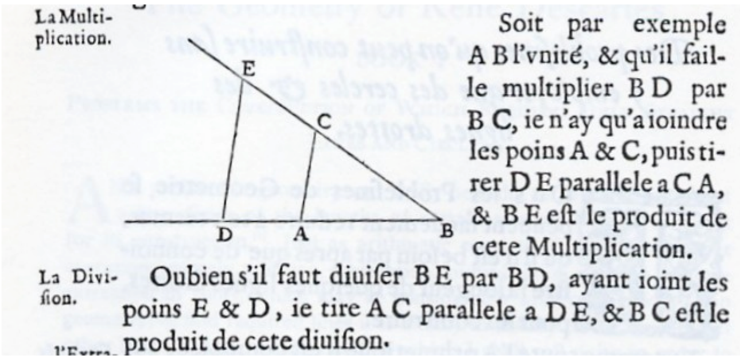
Några aspekter av matematikens formelspråk

Dagens matematik är starkt förknippat med dess speciella symboler. Förutom talsymboler är detta historiskt sett en ganska modern koppling, då matematiken länge var i huvudsak retorisk till sin karaktär. Sedan algebran utvecklats från 1600-talet och framåt har ett allt mer sofistikerat och effektivt formelspråk blivit den moderna matematikens ansikte, på senare tid inte minst genom dess möjlighet att hanteras av avancerade datorprogram. Även skolmatematiken är starkt algebraiserad på gymnasienivå. Allt detta motiverar ett intresse att belysa detta matematikens formelspråk, både ur matematiska och didaktiska aspekter. Här kommer några sådana att tas upp, med en betoning på funktionella aspekter.

Algebraisering

Ibland får man höra att Descartes låste den västerländska filosofiska tanken i dualismens kniptång, dvs. separationen mellan ande och materia, men när det gäller matematiken, en liten bilaga med namnet La Géométrie (utgiven 1637) till hans filosofiska metod, befriade han snarare tanken från kalkylens börda, samtidigt som han uttryckte en tidig känsla av att algebra inte handlar om att fördjupa sitt tänkande, snarare tvärtom. Kanske införde han en annan dualism i den matematikfilosofiska diskursen, den mellan innehåll och form. Möjligen kan man tillåta sig att dra en viss parallell mellan dessa båda dualismer, ande och innehåll gentemot materia och form? Descartes text från 1637 ser fortfarande med 2000-talets ögon helt modern ut och han kan sägas vara skaparen av den algebraiska form som sedan blivit matematikens eget språk, även om en symbolisk uttrycksfrom för variabelidén presenterats av Viète ett 40-tal år tidigare. Det hävdas ofta att själva variabelidén fanns tillämpad redan hos Apollonius. (Se t.ex. Sfard, 1995)

Vad Descartes genomförde var en *algebraisering* av den klassiska geometrin: genom att beskriva geometriska kurvor som relationer mellan sträckor kunde han med bokstäver som symboler för sträckornas längder (relativt en given enhet, se figur nedan) beskriva dessa relationer med ekvationer med dessa symboler. Han visade hur de grundläggande operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, samt rotutdragning enkelt kunde konstrueras på de givna sträckorna, vilket hade den enkla och geniala konsekvensen att det räckte att utföra operationerna på symbolerna för sträckorna för att studera geometriska konstruktionsproblem. Effekten var dubbel: För det första kunde gamla geometriska problem (både lösta och olösta av grekerna) lösas med den nya metoden (ofta enkelt) och för det andra kunde man utgå från ekvationer och upptäcka geometriska kurvor ingen någonsin sett eller ens anat (se t.ex. Bergsten, 2004).


La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Ou bien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

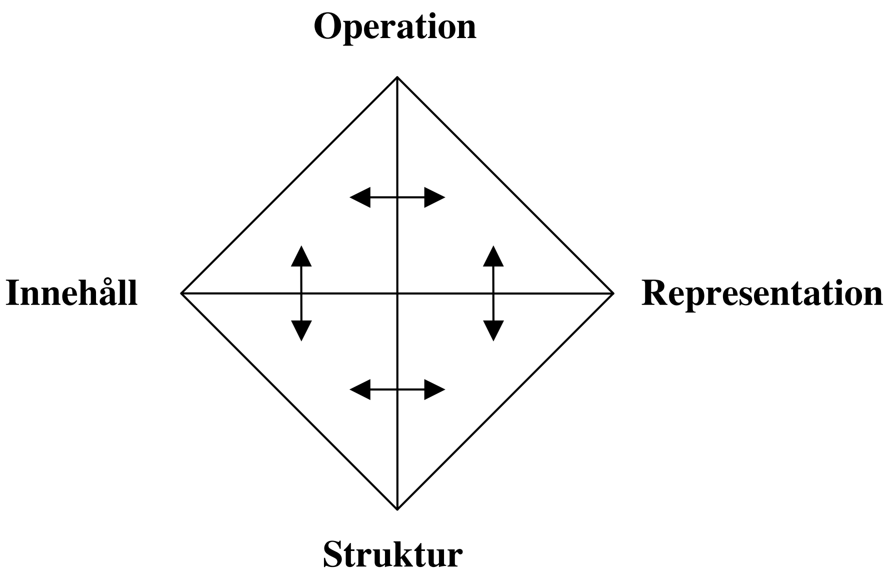
När man på detta sätt använder algebran, dels för att förstå ett annat innehållsområde som till exempel geometrin, dels för att utveckla det genom att gå vidare inom modellen (dvs. algebran), existerar ingen dualism mellan form och innehåll, det handlar snarare om en dialektik. Algebran är här dubbelt funktionell genom att inte vara enbart *representativ*, dvs. att som ett symbolsystem betyda eller representera något, utan även *operationell*. Genom en formell transformation, som till exempel faktorisering, ekvationslösning eller derivering, kan en mening bli synlig, via den representativa funktionen, som i ett tidigare skede var dold. Till exempel ger uttrycket nedan, för en som kan läsa matematik, en mängd representativa tolkningar, till exempel en ekvation eller en bild som skärning mellan en rät linje och en rationell funktion.

$$\frac{13x^2+7}{x^2+10}=2x$$

Vem ser här direkt att $x=\frac{1}{2}$ är en lösning till ekvationen, och vem ser de andra två reella lösningarna (som är $3\pm\sqrt{2}$), eller att det överhuvudtaget finns två reella till? Det är den algebraiska kodens operationella funktion som möjliggör allt detta – det går (här enkelt) att ”lösa ut *x*”. Som graf slingrar sig den rationella funktionen (för positiva *x*-värden mellan 0 och 5) ganska intrikat kring den räta linjen. Den operationella funktionen hjälper till att reda ut detaljerna i denna representativa bild. Relationen mellan mening och operation är dock ganska subtil. Ses uttrycket ovan som en ekvation är den ju ekvivalent med $13x^2+7=2x\cdot(x^2+10)$ men ”betyder” då grafiskt skärningen mellan ett andra- och ett tredjegradspolynom, alltså en helt ny ”mening”.

Form och innehåll

Ett försök att fånga detta nyss nämnda dynamiska samspel mellan matematikens form och innehåll, samt mellan operation och struktur, är den kristall för *matematisk operativitet* som ett dynamiskt system jag beskrev för 15 år sedan (Bergsten, 1990, s. 49):



Innehållet genererar formen, inklusive formelspråket. Men formen genererar i sin tur innehåll, som nämndes i samband med kommentarerna om Descartes. Det liknar dialektiken mellan tanke och ord. Matematikens utveckling illustrerar detta tydligt.

En tanke i samband med kristallen var också att den matematiska formen, definierad som symboluttrycks *mönster*, ibland kan ses direkt avspegla sitt matematiska innehåll. En tolkning av additionen 2 + 3, till exempel, är att två högar med 2 respektive 3 objekt läggs intill varandra för att läggas ihop: **oo ooo**. Det konkreta arrangemanget återspeglas i symbolernas arrangemang. Just därför blir symbolmanipulationerna som grundas på denna operation isomorfa aktiviteter till motsvarande operationer på de konkreta objekten. Liknande bilder kan skapas för övriga räkneoperationer, mer avancerade operationer (och objekt) ärver sedan sina former från dessa grundläggande och det blir tydligt varför den symboliska matematiken fungerar (Bergsten, 1990, s. 166; jfr Kline, 1985), dvs att den representativa funktionen är stabil under den operativa. Den matematiska notation som visat sig ha livskraft har just denna *genetiska karaktär* (Bergsten, 1990), eller som Leibniz uttryckte det (citerat i Cajori, 1928/29; se även Bergsten, 1990):

> In signs one observes an advantage in discovery which is greatest when they express the exact nature of a thing briefly and, as it were, picture it; then indeed the labour of thought is wonderfully diminished.

Precis detta syns till exempel hos den algebraiska beskrivningen av kommutativitet för addition: $a + b = b + a$, där likhetstecknet fungerar som en spegel för den additiva formen.

De *stipulativa* (=icke-genetiska) former som finns med i skolmatematiken ställer ofta till didaktiska problem på ett helt annat sätt an de genetiska, till exempel kvadratrotssymbolen och potenser. En annan aspekt som är en styrka hos den algebraiska koden men ofta ett problem för den lärande, nämligen att i en och samma symbol (symboluttryck) finns ofta både en representativ och en operativ funktion tillgängliga och det är upp till sammanhang och uttolkare att välja väg. Tolkar man till exempel $2 + 3$ operativt blir förstås responsen kort och gott 5, men tolkar man det strukturellt (begreppsinnehållsligt) blir responsen ”en addition, som har vissa strukturella egenskaper som till exempel kommutativitet”, och för denna representativa tolkning behöver man inte ”räkna ut vad det blir”. Collis (1974) kallade detta fenomen i matematiken att en uträkning kan ”avslutas” eller inte för *closure*. För en lärande blir lätt uttryck som inte når *closure* svårbegripliga och han/hon hittar sitt eget sätt att sluta den, vilket kan leda fel matematiskt. I den tidiga skolan tränas det ganska ensidigt på den operativa funktionen vilket leder till att elever kan få problem när det fortfarande är en addition men inte längre går att ”räkna ut vad det blir”, till exempel $x + 3$. I litteraturen har (den engelska) termen *procept* använts (Gray och Tall, 1991) för beskriva detta de matematiska symbolernas janusansikte. Procept är en ihopkoppling av termerna *process* och *concept* och pekar på den dubbla tolkningsmöjlighet som ofta finns i matematiska symboluttryck. Tall (2002) ger en generell bild av matematiken i tre ”världar”, där den som bygger på proceptuellt tänkande utgörs av aritmetiken och funktionsläran och är handlingsgrundad, till skillnad från den perceptionsgrundade geometrin. Den axiomatiska världen har växt fram ur dessa två världar.

Symbolkänsla

Att efter behov kunna se vad som är väsentligt i ett matematiskt symboluttryck, vad man kan göra med det osv., kallas med en engelsk term *symbol sense*, som jag en gång översatte med *symbolkänsla* (se t.ex. Bergsten, Häggström och

Lindberg, 1997). Tidigare användes en term *number sense* för aritmetiken för att fånga in det mångfacetterade och komplexa i en rik och flexibel uppfattning av vad tal är. Termen *symbol sense* sågs som en motsvarighet för algebran och blev kanske spridd genom en artikel av Abraham Arcavi (Arcavi, 1994), även om termen användes av andra tidigare (se Bergsten m.fl., 1997), redan under en konferens om datoralgebra i matematikundervisning, i Denison 1992 (Page, 1992, s. 72). I detta sammanhang föddes ju också ett behov av en sådan term. Redan Descartes uppvisade en långt driven symbolkänsla. Några kriterier för symbolkänsla beskrivs i Bergsten m.fl. (1997, s. 20):

- Uppskatta styrkan i det algebraiska symbolspråket
    - Använda symboler då de behövs
    - Överge symbolerna när man ”drunknar” i dem, välja lämpligare angreppssätt
    - Inse vad en symbolisk lösning innebär
- Ha en förmåga att skriva om och ”läsa” symboluttryck, och se detta som två komplementära aspekter av algebran (flexibilitet)
- Veta att verbal och grafisk information kan uttryckas algebraiskt/symboliskt, och kunna göra denna översättning
- Kunna och våga välja en ny symbolisk representation av problemet som passar bättre
- Inse att det är nödvändigt att under problemlösningen kontrollera och jämföra de symboliska uttryckens innehåll med vad man intuitivt känner att man ska få fram
- ”Lita på” symboler, bl.a. att de kan visa på nya aspekter

Termen symbolkänsla underförstår i sig att det inte går att tala om en ren lingvistisk förståelse av det algebraiska formelspråket – det finns inget som ett rent formellt notationssystem i matematiken (Stenlund, 1996). Varje sätt att läsa en formel bygger på en tidigare *teckenpraxis*, en vana eller erfarenhet att veta vad man kan göra med olika konstellationer av symboler. Och detta av principiella skäl: Just detta faktum att börja använda en formalisering med symboler bygger på att man vet att det är möjligt, att man har erfarenhet och kunskap om det, som man tar med sig. Det är med detta synsätt meningslöst att prata om ett rent mekaniskt symbolmanipulerande, utan matematiskt innehåll. Däremot är det ett didaktiskt problem, då eleven i allmänhet saknar den erfarenhets - och kunskapsbakgrund som gör symbolmanipuleringen självklar för experten. För en matematiker/lärare är t.ex. derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

innehållsrik och därmed meningsfull för att han/hon både kan se dess representativa och operationella funktion. Läraren kanske förklarar den representativa genom en analogi med förändringskvot i någon konkret situation men vet samtidigt utan att säga det (eller kunna säga det) räknetekniskt vad man kan göra med den och vilka resultat som kan nås. För en elev kan den kännas helt meningslös då han/hon inte ser hela denna tekniska potential utan bara ett krångligt uttryck ofta utan tydlig koppling till den förklarade representativa bilden.

För att bygga vidare på Stenlunds analys, är alltså formelspråkets teoretiska och praktiska dimensioner oseparabla, och man borde i linje därmed kunna använda den epistemologiska didaktikteorins (utvecklad av Yves Chevallard) grundenhet för analys, en formelspråkets *praxeologi*. Inom en given institution används formelspråket som en metod att lösa vissa typer av problem (praktiskt kunnande). Detta formelspråk är därmed ett teoretiskt verktyg (en teknologi) med en teoriram som validerar dess användning (teoretiskt kunnande). Se t.ex. Barbé, Bosch, Fonseca och Gascon (2005) för en introduktion till detta teoretiska perspektiv.

Formlers egenskaper och struktur

Det finns flera analyser av formelspråkets egenskaper och struktur (t ex Bergsten, 1990; Boschet, 1989; Cajori, 1928/29; Pimm, 1987; Winslöw, 2000), där man bl.a. konstaterat att det är ett överraskande litet spektrum av rumsliga relationsprinciper som används. Bergsten (1990) noterade till exempel att de matematiska former (dvs. symboluttrycks mönster) som förekommer i den elementära skolmatematiken (aritmetik/algebra) är överraskande få.

Grundprincipen är linjäritet, en naturlig utveckling från det vanliga skriftspråket, där ord och satser listas i följd på motsvarande sätt som den talade motsvarigheten, i en temporal sekvens. I vårt alfabetiska språk, liksom i många andra men inte alla, ordnas ljudtecknen horisontellt, från vänster till höger. På samma sätt skrivs de flesta aritmetiska operationer, ekvationer, funktionsuttryck, integraler, osv., horisontellt linjärt, med vissa kompletterande radbrytande notationer (bråk, potens, index mm.). Detta har väl delvis sin grund i kraven på integration med det naturliga språkets sätt att skriva, med boktryckarkonstens tekniska restriktioner. För det mesta går det att läsa från vänster till höger, men oftast även i annan ordning. Ofta används parenteser för att styra vilka delar i ett uttryck som ska tas för sig. Att vara ”läskunnig” i matematik innebär bl.a. just att kunna identifiera sådant. En matematisk formel innehåller oftast ett eller flera objekt och en eller flera operatorer som verkar på objekten samt ofta även symboler för relationer (likhetstecken osv.) mellan delar av formeln.

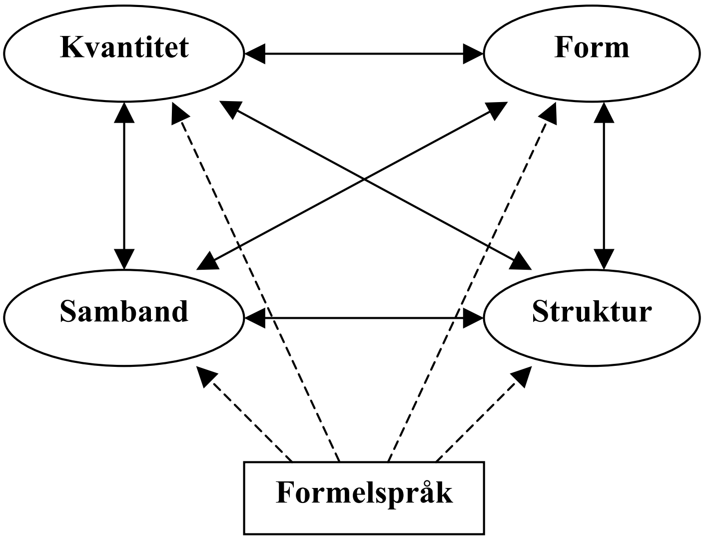
Trots den ofta linjära karaktären hos en formel är den dock mer en bild än en teckensträng och har en tvådimensionell karaktär mer än det naturliga språkets endimensionella. Genom att betrakta denna bild en stund, ungefär som man betraktar ett (logiskt-strukturellt) konstverk, ofta då genom att fokusera på olika delar i taget, se helheter och detaljer, och tänkbara transformationers konsekvenser, får den kompetente ”läsaren” en idé om hur den kan bearbetas, utifrån den aktuella frågeställningen. Det handlar här ofta om ett ganska intrikat och svåranalyserat spel där ofta inte formelns representativa funktion är lika aktiv som en kompetent av vad Pierce kallar *diagrammatiskt tänkande*, där formelns synliga och potentiella strukturella egenskaper (vad jag ovan kallade matematisk form eller mönster) spelar den avgörande rollen (se t.ex. Dörfler, 2004). Denna bildmässiga dimension utgör en symbolernas *ikoniska funktion*, som kan kallas formelspråkets tredje funktion (bredvid den representativa och den operationella), är säkert en viktig komponent i symbolkänslan. En annan aspekt av den ikoniska dimensionen, formlers genetiska karaktär, har redan berörts och utgör ytterligare en sådan komponent.

Algebra som didaktiskt verktyg

Inledningsvis nämnde jag Descartes *algebraisering* av geometrin. En diskussion kring innebörden i detta begrepp görs i Bolea, Bosch och Gascon (1999) , som beskriver algebra inte som ett innehållsområde utan som ett modelleringsverktyg för matematikens innehållsområden:

> Elementary algebra does not appear as a self-contained mathematical work comparable to other works studied in academic core courses (such as arithmetic, geometry, statistics, etc.), but rather as a modelling tool to be (potentially) used in all mathematical curricular works and which appears to be more or less used in them. (Bolea et.al., 1999, s. 141)

På detta sätt fungerar algebran som ett *didaktiskt verktyg* med vilket man kan nå djupare insikt inom innehållsområdet. Det matematiska formelspråket kan därmed liknas vid en dubbeleggad yxa, dvs. både ett problemlösningsverktyg och ett didaktiskt verktyg (Bergsten, 2003). Betraktar man matematiken i generell mening som ett systematiskt studium av kvantiteter, former, samband och strukturer, ger detta följande bild av formelspråkets roll för matematiken (efter Bergsten, 2003, s. 8):



Sammanfattningsvis ger diskussionen ovan en bild av några aspekter av matematikens formelspråk som kan illustreras med följande matris:

Användning / Funktion	**Representativ**	**Operationell**	**Ikonisk**
Problemlösningsverktyg			
Didaktiskt verktyg			

Vid ett konkret matematiskt arbete där formelspråket aktualiseras, som till exempel att undersöka värdet av integralen $\iint_{x^2+y^2\leq 2x} \frac{dxdy}{|x|+|y|}$, är det dynamiken mellan matrisens olika delar som skapar en kombination av en möjlighet att kunna lösa den förelagda uppgiften och kunna uppleva en förståelse av arbetet och resultatet. Den inneboende komplexiteten i denna aktivitet har här bara kunnat antydas.

Referenser

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics 14*(1), 24-35.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascon, J. (2005). Didactic restrictions on the tecaher's practice: the case of limits of functions at Spanish high schools. To appear in *Educational Studies in Mathematics*.

Bergsten, C. (1990). Matematisk operativitet. En analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematik. *Linköping Studies in Education*. Dissertations No. 29.

Bergsten, C. (1999). From sense to symbol sense. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I.II*, xxx-yyy. Osnabruck: Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik.

Bergsten, C. (2003). A classification of algebraic tasks. Presentation at the seminar *New trends in mathematics education research: an international perpsective,* Bologna, February 27, 2003.

Bergsten, C. (2004). Beyond the representation given – The parabola and historical metamorphoses of meanings. (Paper presented at PME28, Bergen 2004) *SMDF Medlemsblad, nr 10*, 37-49.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren Tema*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Bolea, P, Bosch, M & Gascon, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organisation. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I.II*, 138-148. Osnabruck: Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik.

Boschet, F. (1989). Fonctions du code symbolique dans le discours mathématique. *Educational Studies in Mathematics* 18, 19-34.

Cajori, F. (1928/29). *A history of mathematical notations, Vol I & II*. Chicago: Open Court.

Collis, K. (1974). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint*. Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Descartes, R. (1954). *The geometry of Rene Descartes*. (transl. byD. Smith and M. Latham) New York: Dover.

Dörfler, W. (2004). Mathematical reasoning and observing transformations of diagrams. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Mathematics and language. Proceedings of Madif4* (pp. 7-19). Linköping: SMDF.

Gray, E. & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference, Vol II*, 72-79. Dipartemento di Matematica, Universita di Genova.

Kline, M. (1985). *Mathematics and the search for knowledge*. New York: Oxford University Press.

Page, W. (1992). Computer algebra systems and parameters of instruction. In Z. Karian (ed.), *The use of symbolic computation in undergraduate mathematics. Proceedings of the Denison conference* (pp. 69-76). The Mathematical Association of America.
Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge.
Schweiger, F. (2000). The implicit grammar of mathematical symbolism. In B. Barton (Ed.), Communication and language in mathematics education: The pre-conference publication of working group 9, 71-79. (ICME 9, 30th July-6th August, 2000, Makuhari, Japan) MEU Series #2, The University of Auckland.
Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior 14*(1), 15-40.
Stenlund, S. (1996). Poincaré and the limits of formal logic. In J-L. Greffe, G. Heinzmann & K. Lotenz (Eds.), *Henri Poincaré, Science and philosophy. International Congress, Nancy, France, 1994*. Akademie Verlag, Berlin, Albert Blanchard, Paris, pp. 467-479.
Winslöw, C. (2000). Transformations in mathematical discourse. In B. Barton (Ed.), Communication and language in mathematics education: The pre-conference publication of working group 9, 93-102. (ICME 9, 30th July-6th August, 2000, Makuhari, Japan) MEU Series #2, The University of Auckland.

/ Christer Bergsten

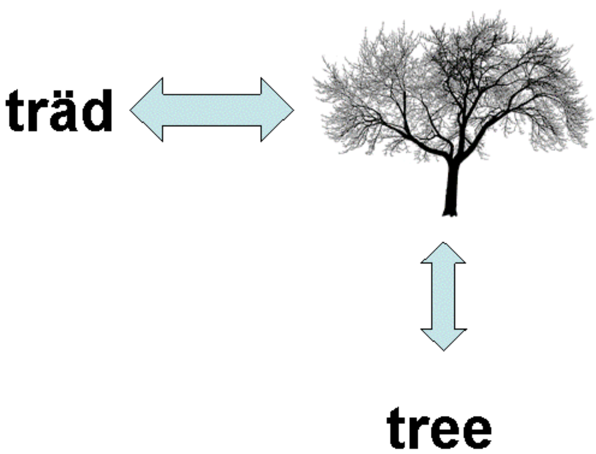
Har matematiken ett språk, egentligen?

I den här uppsatsen vill jag diskutera frågan om matematikens språk ur en lingvists synvinkel. Eftersom mina egna matematikstudier avslutades på ett relativt tidigt stadium, tänker jag mest hålla mig till ett exempel som jag känner mig någorlunda säker på, nämligen Pythagoras' sats, och för att göra det enkelt för mig själv återger jag den här i den version som finns på webbsajten susning.nu:

> Summan av kvadraterna på kateterna är lika med kvadraten på hypotenusan.
>
> $$a^2 + b^2 = c^2$$

Det första vi kan konstatera är att (som Christer Kiselman också framhöll i sitt föredrag vid workshopen) det finns två kandidater till benämningen "matematikens språk". I exemplet ovan uttrycks Pythagoras' sats dels på ett språk som bara skiljer sig från vanlig svenska genom förekomsten av matematiska termer som *katet* och *hypotenusa*, dels med hjälp av en formel. Även om det i allmänhet är formelspråket man avser med "matematikens språk" är ju också den matematiska svenskan intressant att studera som sådan. Det är vidare så att båda de här "språken" har en del kanske lite oväntade egenskaper. För att kunna diskutera dem måste vi först diskutera några mera allmänna aspekter av hur språk fungerar.

För att förstå ett språkligt uttryck behöver vi kunskap av flera olika slag. Till att börja med måste man i tillräcklig grad behärska själva språket – dess grammatik och ordförråd. De här sorternas kunskap kan man kalla **grammatisk** och **lexikal**. Den grammatiska kunskapen kommer jag inte att säga så mycket om här, även om den är central för språkförståelsen. Den lexikala kunskapen innebär främst att vi har kunskap om ordens betydelse – i de enklaste fallen, att vi kan förknippa orden med en viss utomspråklig verklighet, som i följande bild:



Men förutom den språkliga kunskapen behöver man också icke-språklig kunskap (som ibland kallas **encyklopedisk**). Begrunda t ex följande mening:

> Jag har inte fått så mycket äpplen på sistone, så jag måste nog snart beskära träden.

För att förstå poängen med detta påstående, räcker det inte att veta vad orden betyder, utan man måste också veta sådana saker som att äpplen växer på träd (vilket ju kan tyckas vara ganska trivialt) och att man ibland måste beskära äppelträd för att det ska bli äpplen på dem (något mindre trivialt). Som bland annat filosofen Quine har framhållit, finns det knappast någon klar gräns mellan lexikal och encyklopedisk kunskap. Någon skulle t ex kunna hävda att det är en del av betydelsen hos ordet *äpple* att äpplen växer på träd, och det är inte helt självklart hur man ska argumentera emot en sådan ståndpunkt. Under alla förhållanden kan vi notera att förståelse av språkliga uttryck i allmänhet fordrar bakgrundskunskap.

I olika sammanhang brukar man framhäva kontextens roll för förståelse. Kontext är nu ett väldigt vitt begrepp. Jag tänker här ta upp en sida av kontextens roll som jag ska kalla förståelsen av referentiella bindningar. Detta kräver emellertid lite bakgrund.

Pythagoras' sats uttrycker ju ett påstående. (Matematiker brukar, tror jag, använda termen "utsaga". Både "påstående" och "utsaga" används på ett lite vagt sätt där de kan tolkas både som den talhandling som utförs och innehållet i talhandlingen. Men detta är inte så viktigt för diskussionen här.) I en svensk grammatik kan man hitta exempel på påståendesatser som ser ut så här:

> Pelle gillar Lisa.

Den här satsen handlar om två individer som sägs ha en viss relation till varandra. Mera generellt kan påståendesatser sägas **predicera** egenskaper eller relationer om individer eller andra entiteter, som man **refererar** till i satsen. För att kommunicera ett påstående måste en talare ge sin lyssnare tillräcklig information för att identifiera å ena sidan referenterna (det man talar om), å andra sidan vad som prediceras (det man säger om referenterna). För kommunikationen spelar det egentligen mindre roll hur man bär sig åt för att åstadkomma detta. I stället för att använda ord kan man till exempel peka på det man vill tala om. Har man en gång identifierat en referent kan man sen för det mesta använda pronomen:

> Hon ser honom.

I talspråket är det faktiskt mindre vanligt att man identifierar en referent och påstår något om honom/henne/den/det i samma sats. I stället tenderar man att bryta ut identifikationen på exempelvis följande sätt:

Den där killen som bor hos oss du vet, han ska åka hem imorgon.

Vad man gör här är alltså att först tala om vem man vill tala om genom uttrycket *den där killen som bor hos oss du vet* och sen använda pronomenet *han* i satsen som uttrycker själva påståendet.

Vi är ofta ganska implicita när det gäller referens. Antag att man ser följande rubrik i en tidning:

Göran Persson möter opposition inom partiet.

Det är inte utsagt här vilket parti det handlar om, men vi förstår utan vidare att det måste vara Göran Perssons eget parti. I en annan kontext skulle vi få en annan tolkning. I följande mening antar vi att *partiet* refererar till kommunist-partiet, eftersom det var det enda tillåtna i Sovjet:

Solzjenitsyn var inte medlem av partiet.

Med referentiella bindningar menar jag alltså de länkar ut i världen som krävs för att vi ska förstå vad ett påstående handlar om.

Det som jag nu har sagt om språklig kommunikation i allmänhet är också tillämpbart på matematikens språk. Man föreställer sig väl gärna att matematiker uttrycker sig på ett exakt och entydigt sätt. I själva verket är det lätt att se att även om ett matematiskt påstående kan vara exakt, är det språkliga uttryck man använder ofta lika implicita som de påståendesatser vi hittar i vardagsspråket. En direkt konsekvens av detta är att läsaren måste använda den kunskap han eller hon redan har för att förstå ett matematiskt påstående. Låt oss igen titta på Pythagoras' sats:

Summan av kvadraterna på kateterna är lika med kvadraten på hypotenusan.

I det här påståendet samverkar den lexikala betydelsen på ett intressant sätt med kontexten. En uppenbar sak som man måste förstå här är att alltihop handlar om en rätvinklig triangel. Den som kan matematik har ingen svårighet att dra denna slutsats trots att satsen inte explicit inleds "I en rätvinklig triangel...". I Bonniers Svenska Ordbok definieras *katet* som "var o. en av kortsidorna i en rätvinklig triangel" och *hypotenusa* som "längsta sidan i en rätvinklig triangel". Vi ser att här behöver man en del bakgrundskunskap (som för de flesta av oss är så pass självklar att vi sällan reflekterar över den). Om man till exempel inte vet att det bara finns en rät vinkel i en triangel och att den sidan som står emot den räta vinkeln är den längsta, blir definitionerna av *katet* och *hypotenusa* ganska obegripliga. Men vi ser också att den som känner till definitionerna också kan dra slutsatsen att påståendet handlar om rätvinkliga trianglar, eftersom det bara är för dem som termerna är definierade.

För att förstå substantivet *kateterna*, som ju står i bestämd form, måste vi konstruera en referentiell bindning till en rätvinklig triangel. 'Katet' är ett relationellt begrepp i den meningen att en katet alltid måste tänkas som del av en triangel, den kan inte existera som ett självständigt objekt. Nu handlar inte Pythagoras' sats om någon viss triangel utan är i stället ett generellt påstående som är sant om alla rätvinkliga sådana. Detta är ytterligare ett exempel på implicit information som inte ges något språkligt uttryck, och att vi uppfattar påståendet på rätt sätt när vi läser det i en lärobok i geometri beror förmodligen på att vi har kunskap om vilken sorts påståenden som kan uppträda i en sådan text. Men det finns ytterligare implicit information som är så självklar för oss att det till och med verkar närmast knäppt att ifrågasätta den. Hur vet vi egentligen att det handlar om samma triangel hela tiden? Kanske Pythagoras i själva verket menade att kateterna fanns i en triangel och hypotenusan i en annan? Förmodligen handlar det här om väldigt generella principer för kommunikation och förståelse.

Sammanfattningsvis: förståelse av språkliga uttryck kräver bakgrundskunskap och kopplingar till kontexten, och matematikens språk är inget undantag från detta.

Hittills har jag egentligen bara talat om det första av de två matematikspråken – dvs. vanlig svenska med tillägg av matematiska termer. Hur är det nu med formelspråket? Man kanske skulle kunna tro att matematiska formler skulle vara exakta och kontextoberoende. I praktiken är detta inte alls fallet. Betrakta Pythagoras' sats uttryckt som formel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Det är lätt att inse att denna formel tagen för sig själv inte uttrycker något bestämt påstående över huvud taget. Den kan sägas predicera en relation mellan tre storheter, a, b och c, men ingen som helst information om vilka dessa storheter är ges i själva formeln. Om man vill uttrycka Pythagoras' sats helt explicit, är det ganska svårt att göra det med matematisk standardnotation. Jag har försökt åstadkomma det med hjälp av predikatlogisk notation, men det visar sig vara rätt krångligt eftersom predikatlogiken inte är så bra på att referera till flera objekt på en gång.

Hur fungerar då en sådan här formel i en matematisk text, t ex en lärobok i geometri, om den inte innehåller den nödvändiga informationen om referenterna? Det finns åtminstone två olika möjligheter: antingen åtföljs den av en fullständig formulering på vanligt språk, som den vi har sett ovan, eller också ser det ut som i de här exemplen hämtade från nätet, där man nöjer sig med att identifiera referenterna med vanligt språk och sedan låter formeln uttrycka påståendet om dem:

> A^2 + B^2 = C^2, där A och B är kateterna (de kortare sidorna) och C är hypotenusan (den längsta sidan) i en rätvinklig triangel.
>
> Om kateterna är a och b och hypotenusan c så säger Pythagoras sats att $a^2 + b^2 = c^2$.

Vad jag som språkvetare finner lite intressant är att symbolerna a, b och c här får spela en roll som mycket liknar den som pronomen har i talspråket (jämför exemplet ovan). Det blir en arbetsfördelning mellan det vanliga språket och formelspråket, så att de kontextuella bindningarna görs i vanligt språk och bara själva predikationen uttrycks som en formel.

Här kommer jag nu till frågan i rubriken till uppsatsen. Det matematiska formelspråket som det används i matematikundervisningen fungerar egentligen inte som ett självständigt språk utan snarare som ett komplement till det vanliga ("naturliga") språket. I viss mån kan formelspråket sägas vara ett hjälpmedel som fungerar analogt till andra grafiska presentationsformer som diagram och bilder. Men det är också lite intressant att det finns paralleller på flera andra områden, där man också har "formelspråk" som används för att komplettera det vanliga. Det är kanske inte så konstigt att man hittar sådant inom naturvetenskaperna, där ju matematikens tillämpningar spelar en viktig roll. Men även inom mera vardagliga områden som sällskapsspel finns väl utvecklade "formelspråk" som kan blandas med vanlig text (exempel från nätet):

Schack:

> 10...Ke7-d6
> Svart kan inte spela 10...Dd8xd5, eftersom vit bara spelar 11.Df3xd5. Men naturligtvis borde svart nu gått tillbaks med kungen med 10...Ke7-e8. Att vandra ut på brädet med den värdefullaste pjäsen är verkligen att utmana ödet.

Bridge:

Väst spelar ut ♦K och du får hantera följande resurser:

- ☐ 32
- ☐ T9765
- ☐ T932
- ☐ A3
- ☐ AQJ98765
- ☐ 8
- ☐ 4
- ☐ KQ2

Med programmeringsspråk förhåller det sig lite annorlunda eftersom de måste kunna förstås direkt av en dator. Men eftersom datorprogram är ganska svårbegripliga även för de som själva skriver sådana brukar det höra till att man blandar upp programkoden med kommentarer i vanligt språk.

De här funderingarna om matematikens språk skrapar naturligtvis bara på ytan. Jag har egentligen bara diskuterat ett exempel – Pythagoras sats. Formler i matematisk text uttrycker långt ifrån alltid påståenden (axiom eller teorem). Ekvationer, som ju utgör en stor del av de formler man ser, kan inte sägas påstå någonting – de är varken sanna eller falska så länge vi inte har bestämt värden på de ingående variablerna. Språkligt kan de väl närmast jämföras med frågor, närmare bestämt frågeordsfrågor, d v s sådana som inleds med *vem*, *vad* etc. till skillnad från ja-nej-frågor. Det är inte klart i vilken utsträckning man här kan tala om kontextuella bindningar.

Jag tror emellertid att det skulle kunna vara fruktbart att tänka vidare på hur den matematiska kommunikationen fungerar.

/ Östen Dahl