Främlingskapet till formelspråket – om den andra matematiken*

Vad händer med barns matematiska intuition och intresse när det möter matematiska formler? Har formler något innehåll, och i så fall vilket? Finns det särskilda kunskaper om formelspråket som är viktiga men som inte har någon direkt motsvarighet i intuitiv eller idémässig matematikförståelse? Hur reflekterad kunskap om förhållandet mellan matematikinnehåll och matematikformler har matematiklärarna? Är det viktigt?

Inledning

Uttrycket ”den andra matematiken” som förekommer i rubriken används här som ett samlingsbegrepp för tyst och outtalad kunskap i matematik. Det är sådan matematisk kunskap som sällan formuleras eller förmedlas, men är värdefull för elever/studenter när så sker. Man kan givetvis tänka sig tyst kunskap av många skilda slag.

Det finns anledning att förmoda att matematik är ett ämne som innehåller stora mängder tyst kunskap, varav flera typer kan urskiljas i relation till formelspråket. Tyst kunskap är ofta svår att påvisa, man får förlita sig på indirekta metoder. Indicier på tyst kunskap kan tas från undervisningspraktiken. Vi har den frånvarande dialogen mellan studenter och lärare i matematikämnet i allmänhet. Detta trots lärarnas så ofta uttalade vilja att nå dialog och att träna studenters verbala matematiska förmåga. Ämnets abstrakta karaktär kanske gör att det snarast skulle behövas mer verbalisering än i andra ämnen, och inte mindre. Ett annat indicium är att många studenter på högskolenivå finner matematikläroböckerna oläsliga, samma böcker som lärarna allmänt anser är tydliga, sakliga och har en bra framställning.

I denna text formuleras och diskuteras en distinktion av matematisk kunskap i tre typer: konkret, abstrakt idémässig och abstrakt formelmässig. Med idémässig abstrakt matematik avses alla sätt att beskriva, skissa eller antyda matematiska idéer och sammanhang som inte förlitar sig på formelspråk. Uthålligt arbete med konkret matematik i skolan leder ofta till idémässig abstrakt kunskap, men hur denna också ska leda till en formelmässig kunskap som hänger ihop med den idémässiga är ett annorlunda och svårare problem.

Ansatsen är således att inte se matematikens innehåll och språk som oskiljaktiga. De ses inte heller som separata. De två är mycket olika men sammanvävda. Språket är ständigt synligt och hanterbart för oss, svarta symboler på vitt papper som vi kan skriva på valfria sätt. Innehållet ”borde” vara tydligt och kristallklart som språket, men är nästan aldrig det. Det är oftast delvis klart, delvis oklart och halvt frånvarande. Men innehållet är trots dess ständiga partiella frånvaro meningen och syftet med de språkliga symbolerna och deras manipulationer.

Ur idémässig synvinkel ter sig ofta detta innehåll mindre frånvarande. Det finns mycket som tyder på att i riktning mot klyftan mellan idémässig och formelmässig matematik kan man finna verkningsfulla förklaringar till matematikens svårigheter och elevers avtagande matematikintresse under skolan. Att lära sig ett språk, även matematikens formelspråk, som vi kan kalla ”matematiska”, innebär alltid hantering av ord och/eller symboler, som har egna språkliga regler. Det kräver en separat uppmärksamhet. Det kan vara så att om det matematiska innehållet oavbrutet fokuseras så förhindras och försenas lärandet av formelspråkets regler, beteckningssätt och funktioner. Det leder något paradoxalt till en allt större svårighet att se matematiskt innehåll, eftersom det skrivs huvudsakligen på formelspråk, liksom att delta i dess aktiviteter. I detta sammanhang finns kanske en stor del av ”den andra matematiken”.

Idémässig och formelmässig matematik ses som två skilda sätt att beskriva väsentligen samma matematiska innehåll. Vad är då detta innehåll för något? Vad är de matematiska formlernas semantik? Om vi talar om två sätt att beskriva ett matematiskt innehåll, där det ena domineras av naturligt språk och det andra av matematikens formelspråk, och om vi är intresserade av det matematiska innehållet, så har vi i matematiken en viktig språklig frågeställning. Detta är inte förvånande med tanke på att matematiken är det enda ämne som har ett eget specialspråk som används på alla nivåer. Den ihållande tystnaden i matematikklasser kan också indikera ett språkligt problem. Elever finner det är olämpligt att använda sitt modersmål när det står matematik på schemat.

Språk är fundamentalt mänskligt och därmed i princip oreflekterat på liknande sätt som vårt sätt att gå eller sätt att röra stämbanden vid tal. Det är därför inte förvånande att matematiker och matematiklärare som är djupt engagerade i matematikens innehåll inte artikulerar det språkliga problemet. Språk används för att se *något annat*, det som orden pekar på. Det matematiska innehållet är dessutom särskilt svårtillgängligt, vilket ökar dess fokusering. Det gör det ännu svårare att få syn på språket som ett självständigt problem.

I artikeln definieras även en annan indelning av matematikkunskap i tre typer, nu utifrån formelspråket. Det är 1. Kunskap *"över formlerna"* – om hur formler kan användas och kalkyler göras för att lyckas med matematisk problemlösning. 2. Kunskap *"på formelnivå"* – om vilka regler som gäller för formelspråket. 3. Kunskap *"under formlerna"* – om formlernas semantik/innebörder.

Dessutom beskrivs, exemplifieras och diskuteras fyra typer av innebörder – underavdelningar till "kunskap under formlerna". Det är 3A. Numerisk, 3B. Idémässig matematisk, 3C. Idémässig tillämpad, och 3D. Personlig.

Matematikens ovanliga egenskap är dess generalitet: att andra vetenskaper ryms under dess formler. Detta gör att matematikens egna begrepp blir svåråtkomliga. De är "genomsnitt" av de andra vetenskapernas begrepp, vad som är gemensamt hos dem, eller av matematiken själv genererade begrepp. Således: i matematiken har vi ett ovanligt tydligt och väldefinierat språk, som tillåter mycket breda tolkningar, men vars "egna" begrepp därmed ofta är avlägsna – just på grund av den stora tolkningsbredden.

Språkligheter hos matematiken

En diskussion om matematiska språkligheter kan utgå från två uppenbara observationer:

> 1. Inget ämne har ett eget specialspråk som används så flitigt som matematiken använder sitt. Formelspråket tränas från skolans första år, och är helt dominerande i forskning. Det har en central plats i varje text som handlar om matematik.
>
> 2. Det matematiska formlernas semantiska innehåll är betydligt mer svårgripbart än innehållet i andra ämnen. Därmed är man i större grad hänvisad till formlerna (orden) som sådana.

Den första punkten kan sägas höra hemma i matematikämnets praktik - att formelspråket används på ett sätt som ger det en huvudroll. Den andra är en observation av matematikens karaktär - som kunskap om abstrakta förhållanden. Till dessa två observationer kan läggas en tredje ovan nämnda:

> 3. Det förefaller notoriskt svårt att få till stånd verbalisering av matematik i skolan.

Verbalisering har varit ett uttalat mål i skolan under många årtionden, men framstegen tycks vara minimala. Det förefaller som om elever tvekar att använda sitt modersmål i matematikämnet, mer än i andra ämnen. Har denna tvekan att göra med att i matematikämnet förekommer ytterligare ett språk – formelspråket? Hämmar det modersmålets användning, har vi en konkurrens mellan språk? Om så är fallet, är det istället möjligt att använda modersmålet för att erövra både matematisk kunskap och kunskap om och skicklighet i detta specialspråk.

Vad är matematiska?

Låt oss kalla matematikens formelspråk för ”matematiska”. Det betyder vad som skrivs med siffror, bokstäver som ersätter siffror eller mängder, tecken för operationer (som $+$, $-$, $\int$, $\square$, $\sum$, $\cup$, $\cap$) och påståenden om vad som gäller operationerna (som $=$, $>$, $\neq$, $\in$, $\subseteq$). Termen ”matematiska” kommer att användas främst när formelspråkets egenskaper jämförs med andra språks egenskaper. Matematisk terminologi, som ”addition”, ”kontinuitet”, kan vi räkna till matematiskt fackspråk snarare än till matematiska. De lyder under svenskans grammatik.

Precis som naturliga språk har matematiska en grammatik. Om den inte är uppfylld är det omöjligt att avgöra om ett påstående är sant eller inte. Här är tre enkla exempel:

Exempel på	*Matematiska*	*Svenska*
Sanna påståenden	$3 + 4 = 7$	Grodor har två ögon.
Falska påståenden	$3 + 4 = 58$	Grodor har tre ögon.
Icke-påståenden	$3 (4 = 19$	Tre grodor ögon.

Men var hämtas sanningarna? Hur kontrollerar man vad som är sant? I exemplet ovan, för påståendet på svenska, hämtas sanningshalten från biologi. Matematiken har däremot sina egna sanningar, och är därför inte endast ett språk. Det är en vetenskap – matematiker undersöker vad som gäller och vad som inte gäller.

Matematiska är inte något självständigt språk. Det används tillsammans med naturligt språk för att uttrycka en viss typ av påståenden, som ursprungligen gäller kvantitativa förhållanden. På så sätt kan matematiskan beskrivas som ett hjälpspråk till naturligt språk. Emellertid uttrycks oftast den viktigaste informationen i en matematisk text på matematiska, så det är oerhört viktigt för en läsare att kunna dechiffrera och använda det.

Jämförelser mellan matematiska och naturliga språk

Esperanto är ett konstruerat språk. Det är konstruerat av en enskild person: den polsk-judiske läkaren Ludwig Zamenhof. Är matematiska ett konstruerat språk?

Nej, knappast. Matematiskans grammatik växte fram som en kortfattad version av naturliga språks grammatik, men har sedan dess utvecklats genom det egna innehållets dynamik, dvs. styrt av de behov matematikerna upplever. Språket är inte konstruerat av någon individ, det är framvuxet under en lång period i en specifik kultur: i en internationell vetenskaplig kultur. Det är inte alltid konsekvent, och det innehåller undantag, till skillnad från esperanto. I matematiska är det i större grad än i naturliga språk tillåtet för en enskild användare att göra egna lämpliga språkliga uppfinningar. De kallas definitioner.

De flesta av oss möter matematiska i förskolan eller tidigt i skolan. Är detta åldrar då matematiska kan läras helt intuitivt, som modersmålet? Om man ser till hur elever använder matematiska, förefaller det som om språket är ett gränsfall i detta avseende. Svaret tycks dock oftare vara nej än ja.

Matematiska är ett internationellt språk. I likhet med kinesiska uttalas matematiska på vitt skilda sätt, men skrivs på samma sätt. Likheten med kinesiska består i att tecknen inte representerar fonem, uttal, som i europeiska språk, utan betydelser.

Till detta kan läggas att matematiska är speciellt genom att dess talspråkskaraktär är underordnad. Språket läses och skrives mer än det talas. Det är vanligt att det upplevs som omöjligt att beskriva matematiska formler per telefon. Denna egenskap hos matematiskan är en särskild svårighet för strävan att verbalisera matematik.

Om matematisk kommunikation

Språk är till för kommunikation mellan människor. Gäller detta matematikens språk? Ja ibland, men på ett mer indirekt sätt än för naturliga språk. Matematikens praxis är till stor del ensamarbete. Matematiker arbetar till stor del ensamma med sina böcker och sitt tänkande, och elever arbetar ofta ensamma i läroboken. Huvuddelen av matematisk skriftlig verksamhet är säkerligen inte kommunikation – den läses aldrig av någon annan. Den som läses av någon annan är ofta anonym – man vet inte vem som kommer att vara mottagaren. Det gäller studenter och elever som läser läroböcker, och gäller också publicerade forskningsrapporter. Halv-anonym kan man beteckna en lärares undervisning i en klass, den riktar sig inte till en känd person men till en känd grupp. Den matematiska kommunikation som inte är anonym består av lärare som läser elevers/studenters lösningar, samarbetande lärare eller forskare, samt verbal kommunikation. Sammantaget tycks den icke-anonyma skriftliga matematiska kommunikationen ha en liten volym, och den som finns domineras av rättning – dvs.

ett kontrollsyfte. I verbal kommunikation är nog kontrollsyftet mindre framträdande och sannolikt i högre grad gemensamma utforskningar om matematiska förhållanden.

Att nå fram till matematikens idéer

Matematik: konkret och abstrakt

Många lärare i skolan lyckas väl med att bygga upp en god förståelse för abstrakta begrepp hos barnen genom att arbeta med många skilda exempel för ett visst matematiskt begrepp. Om man börjar med att träna förståelse för bråk genom att dela en pizza i bitar, och därefter övergår till andra exempel där den matematiska idén är likartad, så kan bråkens exklusiva koppling till pizzor blir allt svagare för varje nytt exempel som man arbetar med. Det matematiska begreppet ”bråk” kan utkristallisera sig, vinna självständighet, och bli allt mindre knutet till specifika tillämpningar, dock lika användbart. Arbete med konkret matematik kan, naturligtvis, leda till insikter om abstrakt matematik.

Abstrakt matematik: formel- och idémässig

Den ovan beskrivna grundläggande didaktiska metoden, från konkret till abstrakt genom många exempel, avspeglar en central komponent i matematikens natur. Grundläggande matematik kan sägas ha vuxit fram som en tillämpningsoberoende formulering av sådana kvantitativa samband som visat sig gälla för *många skilda sammanhang*. Detta sett ur mänsklighetens synvinkel, vars metod genom historien har varit och är ständigt kommunicerat och ihärdigt prövande och sökande. Matematiken kan därför lika väl sägas beskriva mänskliga synsätt som invarianta egenskaper hos tillvaron. Vi kan inte veta vad som är ”tillvaron” och vad som är ”mänskliga synsätt”.

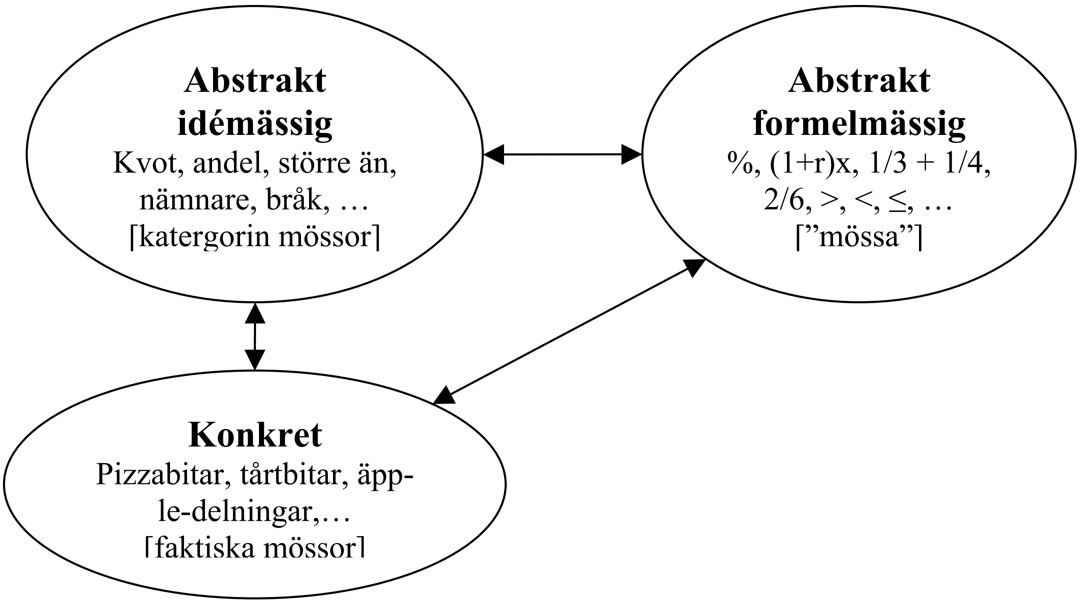
Kan abstrakt matematik vara formler utan idéer?

Men efter denna upptäckt, efter att denna tillämpningsoberoende formulering är gjord, finns möjligheten att arbeta med siffror och formler direkt, utan referens till någon tillämpning. De flesta lär sig räkna med 1, 2 och 3, och även använda dem i lämpliga praktiska situationer, utan att någonsin fundera över vad ”etthet”, ”tvåhet” och ”trehet” kan betyda. Man kan känna sig helt och hållet hemma med symbolerna i sig, vilket är en typ av matematikkompetens. Men i och med formlerna infinner sig problemet att idéerna, som är synliga i det konkreta, kan för elever helt försvinna ur synfältet på grund av ett främlingsskap gentemot matematiska siffror och/eller formler. Detta är ett utpräglat lingvistiskt problem. Sambandet mellan matematiska formler och matematiska begrepp är en central och underskattad fråga. Åtminstone på grundskolenivå är det möjligt att tillägna sig en god förståelse för idémässig abstrakt matematik utan en förståelse för formelmässig matematik. Dessutom kan avsaknaden av formelmässig förståelse kan t.o.m. reducera eller omintetgöra den idémässiga, eftersom den formelmässiga ofta anses befinna sig på ”en högre nivå”. Tidiga former av förståelse betraktas ofta som barnsliga och inadekvata i ljuset av senare former av förståelse, även om de är korrekta och fundamentala.

Denna avsaknad av formelmässig förståelse kan ha många aspekter, vilka är mer eller mindre oberoende av varandra. Det kan vara att det idémässiga saknar förbindelse med det formelmässiga, eller att motivation och mening med det formelmässiga saknas, eller att lust för arbete med former saknas, eller att man inte förstår, kan komma ihåg eller använda de regler för räknandet som gäller för formler. Denna klyfta mellan det idémässigt abstrakta och det formelmässigt abstrakta är starkt relaterad till matematikens lingvistiska särdrag. Vi återkommer till dem senare.

Konkret, abstrakt idémässig, samt abstrakt formelmässig

Man kan alltså tala om tre domäner för matematisk kunskap: konkret, abstrakt idémässig, och abstrakt formelmässig. De antyds i följande figur, som också innehåller några enkla exempel.



I figuren finns ett icke-matematiskt exempel som illustrerar indelningen – ”mössa”. Med [faktiska mössor] menas de som ligger på hyllan i hallen. Med [kategorin mössor] menas vad du och jag kallar mössor, till skillnad från vad vi inte kallar mössor. Det är den kategorisering vi lärt oss och använder. Den är delvis individuell, förändras under livet, men lever framförallt i vår kultur. Den byggs upp hos barn genom exempel och reflektion. Med [”mössa”] menas ordet ”mössa”. Ordet kan givetvis lätt hanteras språkligt om man är van vid språket och dess regler, med eller utan förståelse om dess innebörd. Men det innebär vissa fördelar att ha kategorin, innebörden, klart för sig.

Förmågan att hantera ordet ”mössa” språkligt har vi lärt spontant, men så är knappast fallet för matematiska uttryck. Motsvarande kategorier är också betydligt svåråtkomligare.

Vi återkommer senare i denna text till karaktäriseringar av de två abstrakta storheterna. De motsvarar skilda sätt att beskriva matematiska idéer – med naturligt språk och med matematiska. Det finns även andra skillnader i syfte och möjligheter, som att i den senare formuleringen kan exakta kvantitativa kalkyler göras. I ett senare avsnitt i denna text kommer vi att beskriva fyra olika typer av matematiskt innehåll för matematiska formler.

Matematikens språkliga särdrag är centrala för att förstå den matematisk kommunikationens villkor. Det gäller särskilt mellan lärare och elev, eftersom elever är den dominerande kategorin människor som är ofrivilligt matematikaktiva. Om man antar att de som frivilligt ägnar sig åt ett ämne har lätt för dess språk, ligger det nära till hands att anta att det finns relativt många elever som inte absorberar formelspråket på ett spontant och intuitivt sätt. Däremot har sannolikt de flesta matematiklärare gjort det, eftersom de valt matematik som sin yrkesverksamhet.

Språk och människor

Förmåga att tala och förmåga att gå

Språket beskrivs ofta som människans specialitet – människans främsta definierande egenskap. En människa lär sig naturligt att förstå och tala ett modersmål i den sociala miljö där hon växer upp. Ingen särskild skola eller träning behövs, även om den språkliga skickligheten är beroende av en rad faktorer. På liknande sätt lär sig människor under sin uppväxt att gå, trots att detta är en långt mer fundamental förmåga. Sett i ett mycket långt perspektiv är det mänskliga språket givetvis ett mycket yngre fenomen än gåendet, men de har det gemensamt att de lärs spontant. En annan skillnad är att språket lärs med uppmärksamheten fokuserad på något annat – på det man talar om. Detta talar för att språkförmåga är oartikulerad. Den behöver vara artikulerad endast vid lärande av ett främmande språk eller under andra speciella förhållanden, men den lärs med uttrycklig uppmärksamhet på något annat än språket självt.

Det förefaller givetvis som en paradox att talspråk skulle vara oartikulerad, eftersom dess grundläggande natur är just att vara artikulerad. Men här syftas på att *insikter om talspråkets struktur* inte alltid är kända, erkända eller uttalade. Termen "oartikulerad" antyder att det är inte så svårt att formulera eller artikulera denna kunskap, om uppmärksamheten vänds åt det hållet.

Språklig förmåga kan samtidigt vara mycket hög och mycket omedveten

Ännu ett argument för att språkförmågan är oartikulerad är att man kan vara mycket skicklig på sitt modersmål men helt omedveten om substantiv, verb, prepositioner eller skilda tempus. Man kan vara mycket vältalig och felfri i sin språkanvändning, men helt oförmögen att svara på frågor som "När säger man "jag talade" och när säger man "jag har talat" eller "jag hade talat"?", eller "Har man olika ordföljd i frågor och i påståenden?", eller "När uttalas bokstaven "k" mjukt och när uttalas den hårt?". Det är frågor som vuxna personer som lär sig språket skulle kunna ställa – dvs personer som inte lär sig språket som ett modersmål.

Medvetenhet om språks struktur kommer från aktivitet i språkkurser, om det egna språket eller andra, från möten med personer som har ett annat modersmål och ställer frågor om språket eller ett allmänt aktivt språkintresse, då språket blir språkets objekt.

Vi studerar härnäst ett exempel på hur oreflekterad matematiskan är – likhetstecknet.

Exemplet "="

Symbolen "=" uppfanns 1557 av Robert Recorde som en ren översättning av uttrycket "is equalle to", och slog igenom allmänt några årtionden senare. Det är förmodligen den enda symbol som förekommer i alla matematiska forskningsgrenar. Och det är den första symbol som elever lär sig i grundskolan, näst siffrorna själva och kanske plustecknet.

Ändå missbrukas likhetstecknet långt upp i gymnasiet. Vid beräkning av bensinkostnaden för en bilresa 20 mil med bensinförbrukning 0.8 l/mil och bensinpris 9.5 kr/l kan man se en kalkyl som

$$20 = 20 \cdot 0.8 = 16 = 16 \cdot 9{,}5 = 152.$$

Bensinkostnaden är 152 kronor. Här används "=" ibland i meningen "ger" eller "leder till", och inte i meningen "är lika med" eller "har samma värde som".

Kalkylen fungerar genom att en person som gör denna kalkyl får veta vad denna ville ta reda på. Men en annan symbol än ”=” borde ha använts på två platser i den ovanstående kalkylen. Man kan ändå fråga sig: *Hur är det möjligt att en så grundläggande symbol missförstås i så stor utsträckning, trots lärarnas långa utbildning, alla goda intentioner, och elevernas tusentals och åter tusentals matematiklektioner?*

Svaret kan vara att man är så upptagen av de numeriska kalkylerna att man inte betraktar eller reflekterar över symbolerna som används. Uppmärksamheten ligger ständigt på en aspekt av det matematiska innehållet under symbolerna.

Svaret kan också vara att sådan reflekterad kunskap om matematiskans symboler varken finns i matematikkulturen eller i matematikundervisningskulturen. Den väntar på att bli formulerad och att bli en del av praktiken.

Ett annat exempel - parenteser

Studenter kan göra en kalkyl som f(x)y = f(xy), med motiveringen att man kan multiplicera in i parenteser. Ett sådant brott mot matematiskans grammatik kan tala om för läraren att det finns olika typer av parenteser. Om funktionsbegreppet är tydligt under arbetet så kanske det är tydligt att detta är en annan sorts parentes. Således: om idéerna är synliga så behöver man inte vara medveten om alla grammatiska regler.

Det är klart att parenteser används helt annorlunda i matematiska och i svenska. I svenskt språkbruk kan det som står inom parenteser ofta utlämnas – det är parentetiskt. På matematiska är det inom parentes inte mindre viktigt än det utanför, snarare tvärtom. Det ska beräknas först.

Det är också karaktäristiskt att en lärare, för vilken matematiskan ofta är naturlig och effektiv och därför oreflekterad, lär sig om detta språk från studenters tolkningsförsök. Det är analogt med invandrare som ställer frågor om regler i svenska språket, vilket ger svenskar bättre insikt om svenskans regler.

Kulturmöten framtvingar språkvetenskaper

Språkets osynlighet är värre för matematik än för naturliga språk på det viset att mötena mellan jordens många skilda kulturer, som har skilda språk, har tvingat fram formulering av språken, medveten förståelse av mänskliga språk, för att kunna översätta mellan kulturerna. En kultur som har lyckats att förstå en annan kulturs språk har en stor fördel. Kulturmötena har framtvingat språkvetenskap.

Denna drivkraft för att formulera matematiskan finns inte. Matematiskan saknar en språkvetenskap.

Skilda matematiska kunskaper relativt formelspråket

Vi gör i detta avsnitt en annan beskrivning av matematisk kunskap i tre delar än den föregående. Dessa kategorier är på distinkta sätt relaterade till formelspråket, och kan beskrivas med tre propositioner: **över, på** och **under** de matematiska formlerna.

Regler kontra reglers användning

Matematiska regler är mycket tydliga. Wittgenstein är känd för sin poäng att det inte går på något regelmässigt sätt att tala om hur en regel ska användas. En sådan regel skulle ge en ny fråga om hur denna regel ska användas, osv. Detta är och förblir otydlig kunskap. Men utan sådan kunskap är reglerna, givetvis, oanvändbara.

Låt oss vara mer konkreta. Antag att uppgiften är att förenkla de följande tre uttrycken:

$$1)\ \frac{\frac{2y}{z}+x}{\frac{z}{2y}-x} \qquad 2)\ \frac{4x^2y-y^3}{2x+y} \qquad 3)\ \frac{3^{5/2}}{4\sqrt{3}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Det finns ett antal regler som kan användas vid dessa uppgifter, som t.ex. distributiva lagen ($a(b+c)=ab+ac$), dubbelbråkförenkling ($\frac{a/b}{c/d}=\frac{ad}{bc}$), produkt av bråk ($\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$), förlängning/förkortning ($\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$), konjugeringsregeln ($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$), samt potenslagar som $\sqrt{a}=a^{1/2}$, $a^{-b}=1/a^b$, och $a^{b+c}=a^b a^c$.

Man vilken ska vi använda först? I vilken ordning? När är uttrycket som mest förenklat? Hur avgör vi det? Finns det någon regel för det?

Nej, knappast. Om inte: pröva med 1), 2), 3) ovan. Kan du förklara *varför* du gör vad du gör, mer än med den synnerligen tautologiska motiveringen att ”det leder till svaret”? Detta är matematikkultur, som är svår att definiera entydigt. Men ändå avgörande för att åstadkomma meningsfulla resultat. Böckerna antyder inte ofta existensen av denna kunskap. En elev anar inte att något fattas, utan tolkar lätt luckorna som sin egen otillräcklighet.

Det är omöjligt att göra någon kalkyl utan att ha någon idé om målet, om varför kalkylen kan tänkas vara framgångsrik. Sådana idéer är därmed en viktig matematisk kompetens, ty annars påbörjas kalkyler som inte kan leda till målet, eller ingen kalkyl alls påbörjas. Detta är en kompetens om formler som objekt, som kan beskrivas som kunskap "över" formelnivån:

Tillsammans med geometriska figurer är formelspråket, matematiskan, den synliga och handfasta delen av matematiken, i skarp kontrast till de generella och svåråtkomliga innebörderna. På grund av att språket är mycket tydligt och väldefinierat är det lämpligt som grund för en distinktion i olika typer av matematisk kunskap. Det är naturligt att tala om tre typer av matematisk kunskap.

Typ 1. Meta-matematik – matematiska kalkylmetoder ("över" matematiskan).

Vi har en uppsättning regler – men hur är det möjligt att använda dessa för att genomföra en kalkyl som ger önskat resultat? Denna kunskap är central för matematiker och för alla matematiska problemlösare. Den nämns i förbigående i böckerna, men huvuddelen är sannolikt tyst kunskap. Det handlar till stor del om associationer vid anblicken av olika uttryck och problemsituationer, vilka formats av tidigare räknepraktik.

Metoderna demonstreras vanligen utan kommentarer, ty de ord som förekommer är del av metoden, och inte av metodens beskrivning/förklaring. Denna kunskap kan endast datorprogrammeras i de få fall där det finns tydliga algoritmer. Exempelvis är derivering lättare att programmera än integration. Datoriserade lösningsmetoder är sällan effektiva, ty genomsökning av alla möjligheter är en långsam metod även med superdatorer. Denna kunskap kräver fantasi och representerar människans förmåga till framgångsrikt icke-algoritmiskt tänkande.

Denna kunskap kan inte skrivas med formelspråk.

Typ 2. Matematiskans syntax (på matematiskanivå).

Denna kunskap är kunskap om matematiskans regler. Det är matematiskans grammatik, där vi bortser från innebörder och användningar. Det är just den kunskap som måste formuleras när ett matematiskt symbolhanterande program ska konstrueras. Vissa regler är skrivkonventioner, som a^n för en produkt av n stycken a, medan andra är sanningar som används regelmässigt likt grammatiska regler – grammatiserade påståenden.

Denna kunskap *är* just kunskap om formelspråket.

Typ 3. Formlernas innebörder, semantik (kunskap ”under” matematiskan).

Här finns matematikens tillämpningar, ursprungliga och nya. Här finns också innebörder i mer omedelbar, personlig och metaforisk mening, som de matematikaktivas bilder och associationer. Sådana innebörder spelar ofta stor roll för den matematiska aktiviteten. Denna typ av innebörder är ofta tyst kunskap på grund av brist på matematisk verbal tradition. Den kan ge analogier och förslag till kalkylmetodkunskapen.

Denna kunskap kan skrivas med formelspråk, det är just detta språks syfte. Den kan dock, om än åtskilligt mindre precist, oftast även beskrivas eller skissas med naturligt språk.

Formlernas innebörder, typ 3, kan i sin tur delas in i fyra typer:

3A. Rent numeriska/formella innebörder.

Matematiska resultat är någon typ av påstående om numeriska förhållanden, om hur tal, grupper av tal eller andra storheter förhåller sig. *Matematiska bevis kontrollerar uteslutande detta numeriska/formella innehåll.*

Exempel: analysens huvudsats säger (i korthet) att om en primitiv funktion till $f(x)$ deriveras så blir detta $f(x)$. Beviset använder definitionen av integral samt integralkalkylens medelvärdessats, vilket anger något om skilda tals storleksförhållanden. Man kan i princip sätta in tal och se att det stämmer för dessa tal. I strikt mening säger satsen bara något om dessa tals förhållande till varandra. Denna strikta mening är den numeriska/formella innebörden.

3B. Matematiska idémässiga innebörder.

Detta är alla tolkningar, geometriska, kalkylmässiga och metaforiska, som inte är knutna till någon specifik tillämpning. Analysens huvudsats har många geometriska innebörder utöver dess numeriska innehåll, till exempel att man kan beräkna integraler genom omvänd derivering. En annan är bilden av derivata som lutning och integral som area, och vad huvudsatsen säger om sambandet mellan dem. Denna typ hänger ofta samman med innebörder över formlerna. En del av matematikens magi är att bevisen, som inte berör denna form av innebörd, ändå etablerar idémässiga samband.

3C. Tillämpade idémässiga innebörder.

Dessa innebörder har med någon tillämpning av matematiken att göra. En fysiker kan uppfatta matematiken som endast ett språk om denne har gott om fysikaliska tolkningar av de matematiska formlerna. Detta är givetvis fysikaliska innebörder för matematiska formler. Men matematiker har andra idémässiga innebörder – sådana som inte är knutna till någon specifik tillämpning.

3D. Personliga innebörder.

Varje matematikaktiv människa, eller grupp av matematikaktiva, utvecklar något typ av *personliga metaforer och innebörder* kring matematiska begrepp. Det kan vara minnesregler eller analogier. De kan spela en stor roll för det matematiskt arbetet och för dess resultat. Vissa av dessa blir så småningom allmänt accepterade.

Några kommentarer till typerna av kunskap

För att beskriva matematiskt innehåll är naturligtvis matematiska det främsta språket. Men mänsklig förståelse tycks kräva beskrivningar även på andra språk, framförallt på modersmålet. Både elever och forskare, och förhoppningsvis även lärare, befinner sig i en situation av matematiskt lärande. Då är både matematiken och den egna personligheten närvarande och viktiga komponenter. Det kan göra att naturligt språk ibland är mer träffande än formelspråk även för matematiska förhållanden.

Men att beskriva matematiska innebörder på ”fel” språk, naturligt språk och inte formelspråk, är inte lätt. På grund av den språkliga dissonansen är det en uppgift med tydliga poetiska kvalitéer. Det är lätt att förstå att sådana beskrivningar inte är vanliga i praktisk undervisning.

Om en tvåspråkighet matematiska-svenska är tydlig i matematiken är *översättningar* mellan de två framställningssätten naturliga. Det är en aktivitet där formlers detaljer granskas bit för bit, vilket vanligen inte sker vid *förklaringar*, och som tvingar fram ovan nämnd matematisk ”felspråkspoesi” (exempel: beskriv i detalj hur en bil fungerar med enbart psykologisk terminologi). Den överbryggar abstrakt idémässig och abstrakt formelmässig kunskap med ett otal mer eller mindre hållfasta bryggor.

Om vi anknyter till den tidigare gjorda indelningen i konkret, abstrakt idémässig och abstrakt formelmässig, så svarar konkret mot Typ 3C och 3D, abstrakt idémässig mot Typ 3B och 3D, och abstrakt formelmässig mot Typ 1, 2, 3A och 3D. Personliga innebörder, 3D, kan gälla alla typerna av kunskap.

Vilken typ av innehåll behandlas i dagens skola?

Om man utan någon särskild undersökning skulle försöka sig på att gradera den explicita uppmärksamhet som i skolan ägnas de ovan nämnda sex typerna av innebörder, så skulle den enligt min mening ske på följande sätt:

1. (stark dominans) Typ 3A – Bevis och kalkyler. Kalkyler dominerar. Bevis är emellertid på tillbakagång, även på högskolans ingenjörslinjer.

2. (förekommer ofta) Typ 3C – tillämpade idémässiga innebörder. Här har vi bl.a. skolans lästal.

3. (förekommer ibland) Typ 3B – matematiska idémässiga innebörder. Dessa framkommer huvudsakligen muntligt vid lärares svar på frågor och dialoger, och är viktiga för förståelsen. Förekommer ibland vid lärares genomgångar och sparsamt i läroböcker.

4. (förekommer sparsamt) Typ 1 – kalkylmetoder. Även denna viktiga typ av innebörd framkommer huvudsakligen muntligt vid dialoger. Förekommer sparsamt i läroböcker.

5. (förekommer mycket sparsamt) Typ 3D – personliga tolkningar. Oftast vid personliga dialoger mellan studenter, ibland med lärare. Förekommer också i internetkonversationer.

6. (förekommer mycket sparsamt) Typ 2 – matematiskans regler. Förekommer muntligt från lärare och mycket sparsamt i läroböcker, samt vid personliga dialoger.

Jag menar att Typ 3C är den enda kunskap som generellt beskrivs på ett bra sätt i dagens matematikpraktik. Den dominerande räknekulturen belyser Typ 2 endast implicit men inte explicit – en elev/student får själv huvudsakligen försöka dra sina slutsatser om kalkylernas regler. Man förväntas kunna språket, elever kan med rätta ställa sig frågan ”När då?”. Detta har just att göra med språks grundläggande osynlighet, som beskrivits tidigare.

Typ 1 är sällan uttalad skriftligt, men förutsätter en god kunskap om Typ 2. Typ 3B är mycket viktig, och kommuniceras sporadiskt. Den kan kommuniceras vid en god verbal kultur. I tidigare skolår får Typ 3D spela en roll, vilket kan vara en viktig orsak till de positivare matematikattityderna under dessa år.

Vad är möjligt och önskvärt?

Vi avslutar med en diskussion om möjliga eller önskade fördelningar av arbetstiden över de beskrivna typerna av innehåll. Jag menar att typ 2 – matematiskans regler bör ges en ganska stor plats (i dialog med elever/ studenter), men är en aspekt som om det verkligen ges en huvudroll sannolikt relativt snabbt töms ut och då inte längre behöver särskilt mycket tid. Warren Estys arbete pekar i den riktningen. Detta innebär att främlingsskapet till formelspråket minskar väsentligt. Typ 1 – matematiska kalkylmetoder är en naturlig följd efter att typ 2 – matematiskans regler är avklarad.

Jag menar att de andra typerna alla bör förekomma i matematikämnet i jämnare fördelning än idag. Ju bättre matematiskan fungerar som språk, både medvetenhet om dess regler och frihet i notationer och om dess semantik, ju flitigare kan detta språk användas i skolan på otvungna sätt.

En speciell roll spelar personliga tolkningar, typ 3D. Om studenters personliga tolkningar förekommer relativt ofta så är studenter delaktiga. Det innebär både att lärare utvecklas och får en allt större förmåga att möta närvarande och kommande studenter på framgångsrika sätt. Den innebär antagligen också att studenter upplever att de blir skickligare på logisk argumentation under matematikkurserna.

/ Håkan Lennerstad

---

* Referenser är utlämnade i denna preliminära rapport i essäform med hänvisning till den fullständiga rapporten i den kommande dokumentationen från workshopen vid KTH 2005-03-18.