LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Fogelberg

Månadens problem april - 99

Problemet: Bestäm den kortaste kätting som når från punkten A till golvet i lastrummet via en punkt P på balken BC. Se figuren nedan.

Lösning: Samtliga deltagare i tävlingen har beskrivit avståndet genom en funktion som sedan har deriverats för att finna minimum. Jag visar därför istället en geometrisk lösning. Antaganden och beteckningar framgår av figuren.

Spegla punkten A i BC och kalla speglinspunkten A'. Drag normalen $A'L$ från A' till lastrummets golv. Punkten P på BC där $A'L$ skär BC är den punkt på BC som gör den sammanlagda sträckan $|APL|$ så liten som möjligt.
Ty BC är mittpunktsnormal till AA' och då är $|AP| = |A'P|$ och därmed gäller att $|APL| = |A'PL|$. Eftersom det kortaste avståndet från en punkt till en rät linje är det vinkelräta avståndet följer att $|A'PL| = |APL|$ är det kortaste avståndet från A till lastrummets golv via en punkt P på balken BC.
Alla andra val av en punkt Q på BC ger avståndet $|AQM| = |A'QM| > |A'PL| = |APL|$.

För att beräkna sträckan $|A'PL|$ noterar vi först att AC är parallell med $A'L$ och detta innebär att $\angle DAC = \angle DA'P$ men $\angle DA'P = \angle DAP$ eftersom $\triangle APA'$ är likbent och således är $\angle DAC = \angle DAP$.
Alltså är $\triangle DAC$ kongruent med $\triangle DAP$ vilket medför att $|A'P| = |AP| = |AC| = 5$.
Notera nu att $\triangle ABC$ är likformig med $\triangle EBP$ som ger sambandet $\dfrac{5}{10} = \dfrac{x}{y}$ eller $y = 2x$.
Men även $\triangle EA'A$ är likformig med $\triangle ABC$ och således gäller att

$$\frac{10-y}{5+x} = \frac{5}{10} \Leftrightarrow \frac{10-2x}{5+x} = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = 3.$$

Det sökta avståndet $|APL| = 5 + 3 + 7 = 15$.

Svar: Den kortaste kättingen är 15 m.