LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Fogelberg

Lösning på *marsproblemet.*

Problemet: Tag ett positivt heltal och addera nästföljande tal och fortsätt sedan att addera nästföljande tal tills du får summan 2000. Vilka tal kan du börja med för att på detta sätt få summan 2000?

Lösning:

Vi kallar det första talet a och antar att det krävs n termer för att få summan 2000.

Problemformuleringen ger upphov till en aritmetisk summa:

$$a \ + \ a+1 \ + \ a+2 \ + \ \cdots \ + a+n-1 \ = \ 2000 \tag{1}$$

Vi skriver summan ånyo men börjar med det sista och slutar med det första talet.

$$a+n-1 \ + \ a+n-2 \ + \ a+n-3 \ + \ \cdots \ + a \ = \ 2000 \tag{2}$$

Genom att addera ekvationerna ledvis får vi n termer i vänstra ledet som alla är lika med $2a+n-1$. Högra ledet blir förstås 4000.

Vi har fått ekvationen: $n \cdot (2a+n-1) = 4000$ eller $n \cdot (2a+n-1) = 32 \cdot 125$

Om n är jämnt så är faktorn $(2a+n-1)$ udda och vi har fyra fall:

$n = 32, \ 160, \ 800$ eller 4000.

Här ger $n = 32$ att ur $(2a+n-1) = 125$ får vi $a = 47$.

De övriga fallen ger negativa värden på a.

Om sedan n är udda får vi också fyra fall: $n = 1, \ 5, \ 25$ eller 125.

Här ger $n = 1$ att $a = 2000$ som är trivialt och inte tas med i svaret.

$n = 5$ ger $a = 398$ och $n = 25$ ger $a = 68$. Men $n = 125$ ger ett negativt värde på a.

Svar: Vi har tre icketriviala lösningar: 47, 68 och 398.

Kommentar: De negativa värdena på a betyder också något ”positivt”.
Tag t.ex. fallet $n = 125$ som ger $a = -46$.
De symmetriska avsnitten av summan på var sin sida av 0 eliminerar varandra och detta betyder att: -46 + (-45) + ... + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + ... + 45 + 46 = 0.
Summan av de 93 första talen är 0 och alltså är summan av de resterande 32 talen 47 + 48 + ... + 77 + 78 = 2000. Denna lösning sammanfaller således med lösningen för $n = 32$. På motsvarande sätt förhåller det sig med de negativa lösningarna då n är jämnt.