LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Fogelberg

MÅNADENS PROBLEM

JULPROBLEMEN - 2000

December 2000 - Januari 2001

1. Under vilka omständigheter är det korrekt att säga att 150 = 300, om talet 300 är skrivet i tiotalsystemet?

2. Notera först att $2^2 = 4$ och $2^{2^2} = 16$. Vidare är $2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$.
Kan du bestämma de två sista siffrorna i talet:

$$2^{2^{2^{2^{2^2}}}} \quad ?$$

Förslag till lösning:

1.

Utsagan $150 = 300$, där 300 är skrivet i tiotalssystemet kan man tolka så att 150 är skrivet i en annan bas än 10. Låt oss kalla denna bas b.

Detta ger ekvationen

$1 \cdot b^2 + 5 \cdot b + 0 \cdot 1 = 300$ eller $b^2 + 5b - 300 = 0$, som vi löser och erhåller $b = 15$ eller $b = -20$.

Utsagan är således korrekt om talet 150 är skrivet i basen 15 eller -20.

2.

Vi studerar först

$$2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 2^6 \cdot 2^{10} = 64 \cdot 1024 = 64(1025 - 1) = 64 \cdot 25 \cdot 41 - 64 = \left\{ \begin{array}{l} 64 \cdot 25 \cdot 41 - 64 = \\ 100 \cdot 16 \cdot 41 - 64 = \\ 100N_1 - 64 \end{array} \right\} =$$

$= 100N_1 - 64 = 100N_2 + 36$. De två sista siffrorna i talet $2^{2^{2^2}}$ är alltså 36.

Vi studerar nu nästa potens $2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{16}}$ eller 2^{100N_2+36} som om vi läser ut det lyder:

2 upphöjt till ett tal vars två sista siffror är 36. Vi har:

$$2^{100N_2+36} = 2^6 \cdot 2^{100N_2+30} = 64 \cdot 2^{10(10N_2+3)} = 64 \cdot (2^{10})^{10N_2+3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{obs. att} \\ 10N_2 + 3 \\ \text{är udda} \end{array} \right\} = 64 \cdot (1024)^{\text{udda}} =$$

$$= 64 \cdot (1025 - 1)^{\text{udda}} = 64 \cdot (25N_3 - 1)^{\text{udda}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{binomial} \\ \text{teoremet} \end{array} \right\} = 64 \cdot (25N_4 - 1) = 100N_5 - 64 = 100N_6 + 36$$

Vi har visat att 2 upphöjt till ett tal som slutar på 36 ånyo blir ett tal som slutar på 36.

Därför blir det slutliga steget att undersöka $2^{2^{2^{2^{2^2}}}} = 2^{100N_6+36}$ inte så ansträngande eftersom vi redan i föregående steg visat att det måste resultera i ett tal som slutar på 36. Således gäller att

talet $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}}$, där antalet 2:or i den upprepat upphöjda exponenten är fler än 3, slutar på 36.