

Svar TANA 39/40 Numeriska metoder M – 1996-04-15 /be

1. $y = a \cdot b$, $z = \sin y$, $f = z$, $a \approx 0,5$; $b \approx 2$; $y \approx 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y$

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b$$

$$|\Delta f| \lesssim 1 \cdot \mu |z| + \cos y \cdot \mu |y| + \cos y \cdot b \cdot \mu |a| + \cos y \cdot a \cdot \mu |b|$$

$$|\Delta f| \lesssim \mu \cdot [0,842 + 3 \cdot 0,541] = \mu \cdot 2,465$$

SVAR: Absoluta felet är $2,47 \cdot \mu$ och det relativa felet är $2,93 \cdot \mu$.

3. $-12,5625 = -(8 + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}) = -2^{130-127} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128})$
 $e = 130 = 128 + 2 = 2^7 + 2^1$

Svar: $s = 1$, $e = 10000010$, $f = 1001001000000000000000$

4. Seriens termer är alternerande och montont avtagande mot noll, varför Leibniz kriterium kan användas och trunckeringsfelet uppskattas med första försummade termen. Tag med N termer!

$$|R_T| \leq 5 \cdot \frac{1 + \sin \frac{1}{N+1}}{(N+1)^2} \leq 5 \cdot \frac{1 + \frac{1}{N}}{(N+1)^2} = \frac{5}{N \cdot (N+1)} \leq 0,5 \cdot 10^{-17}$$

SVAR: Vi får $N = 10^9$.

5. $a_4 = -\frac{1}{30} \cdot f^{(v)}(x)$. Bara jämna termer finns med i utvecklingen.

7. SVAR: Approximationsordningen är 4.

8. SVAR:

$$|R_{XF}| \leq \left| \frac{2x - x_1 - x_2}{x_2 - x_1} \right| \cdot \varepsilon$$

10. Som startpunkt för Newton-Raphson väljes $x_0 = 0$. Efter tre iterationer erhålles $x_3 = -0,390$. Metodoberoende feluppskattning på detta värde utnyttjar $f(x_3) = -8,431255 \cdot 10^{-4}$ och $f'(x_3) = -3,102943$. Feluppskattningen blir då $8,5 \cdot 10^{-4} / 3,0 \leq 2,84 \cdot 10^{-4}$

Jag har således fått ett resultat med drygt tre korrekta decimaler.

Anmärkning: $x^* = -0,390271686160$

SVAR: $x^* = -0,390 \pm 0,3 \cdot 10^{-3}$

12. Metod 1 är divergent, eftersom $\varphi_1'(x^*) = -5$, medan metod 2 är konvergent, eftersom $\varphi_2'(x^*) = 0$. Metod 2 är därför helt överlägsen.

Lösningförslag, Del II

13. Rombergs metod ger:

h	$T(h)$	$\Delta/3$	$T_1(h)$	$\Delta/15$	$T_2(h)$	$\Delta/63$	$T_3(h)$
8	833,444						
4	840,690	2,41533 ...	843,10533 ...				
2	842,507	0,60566 ...	843,11266 ...	0,000488 ...	843,113155 ...		
1	842,9635	0,15216 ...	843,11566 ...	0,000200 ...	843,115866 ...	0,000043	843,11591

Minst totalfel i $T_3(1)$, ty här är R_T minst.

$$|R_T| \lesssim |843,115867 - 843,113155| \leq 0,002711$$

$$\text{a) } I = 843,116 \quad |R_B| \leq 0,1 \cdot 10^{-3}$$

R_{XF} fås genom $|R_{XF}| \leq (4 + 4) \cdot \varepsilon$, där $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ (3 korrekta decimaler i tabellen).

$$|R_{XF}| \leq 4 \cdot 10^{-3}; \quad |R_{TOT}| \lesssim (2,711 + 4 + 0,1) \cdot 10^{-3} = 6,811 \leq 7 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{SVAR: } I = 843,116 \pm 0,007$$

$$\text{b) Felet från osäkerheten i ändpunkterna blir högst } 65 \cdot |\alpha - 4| + 144 \cdot |\beta - 4|.$$

14. a) **Linjär interpolation**

Newtons ansats $p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - 1) + c_2 \cdot (x - 1)(x - 2)$ ger med punkterna 1, 2 och 3 värdena $c_0 = 115,698$, $c_1 = 9,489$, $c_2 = -0,103$ och med punkterna 0, 1 och 2 samma värden på c_0 och c_1 men ett nytt värde $c_2 = -0,1085$. För felberäkningen väljer jag det till beloppet största värdet på c_2 . Interpolerade värdet blir $115,698 + 0,3 \cdot 9,489 = 118,5447$ med $R_B = 0$, $|R_{XF}| \leq 0,0005$ samt $|R_T| \leq 0,1085 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,022785$.

$$\text{Svar: } y(1,3) = 118,5447 \pm 0,023285 \text{ eller } y(1,3) = 118,545 \pm 0,024$$

b) **Linjär minstakvadrat-anpassning**

Efter att ha bildat $Ac = b$ multipliceras med A^T och erhålles

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 947,144 \\ 590,188 \end{pmatrix}$$

Vi får $c(1) = 105,238222$, $c(2) = 9,836467$. Polynomet är naturligtvis $c(1) + c(2) \cdot x$.

c) **Resultat vid linjär minstakvadrat-anpassning**

$$\text{Svar: } y(1,3) = 118,0256$$

15. (a) Byt rad 1 och 3, och byt sedan rad 2 och 3

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0,5 \\ 1 & 3 & -1 & 0,6 \\ 0 & 10 & 1 & 0,2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0,50 \\ \hline 0,5 & & & \\ 0 & 10 & 1 & 0,20 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0,50 \\ \hline 0 & & & \\ 0,5 & & & \\ \hline 0 & 10 & 1 & 0,20 \\ 0,5 & & & \\ \hline 0,5 & 0,1 & & \\ \hline 0,5 & 0,1 & -1,6 & 0,33 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0,50 \\ \hline 0 & 10 & 1 & 0,20 \\ 0,5 & 0,1 & & \\ \hline 0,5 & 0,1 & -1,6 & 0,33 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -0,20625 \\ x_2 &= 0,040625 \\ x_1 &= 0,271875 \end{aligned} \end{aligned}$$

(b) $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0,5 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ & 10 & 1 \\ & & -1,6 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 11 \cdot 1 \cdot 5,96 \cdot 10^{-8} \leq 0,66 \cdot 10^{-6}$
 $\Rightarrow \|\delta x\|_\infty \leq 0,66 \cdot 10^{-6} \underbrace{\|x\|_\infty}_{0,272} \leq 0,18 \cdot 10^{-6}$

16. Skriv om differentialekvationen till ett system av första ordningens differentialekvationer:

$$\left. \begin{array}{l} u = y \\ v = y' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u' = y' \\ v' = y'' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = v \\ v' = -20 \cdot v - 200 \cdot u \end{array}$$

Euler ger: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h \cdot v_n \\ v_{n+1} = v_n + h \cdot (-20 \cdot v_n - 200 \cdot u_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases} \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

Vi skall nu gå två steg, vardera med längden 0,025, men med Runge-Kutta.

Erforderliga K (för u)

K1	K2	K3	K4
0,000000	-0,062500	-0,046875	-0,097656
-0,096354	-0,131470	-0,119680	-0,146706

Erforderliga L (för v)

L1	L2	L3	L4
-5,000000	-3,750000	-3,906250	-2,812500
-2,809245	-1,866048	-2,014058	-1,203817

Resultat-tabell

t	u(t)	v(t)
0,000000	1,000000	0,000000
0,025000	0,947266	-3,854167
0,050000	0,823039	-5,816379

SVAR: $y(0,05) \approx 0,823039$

17. Funktionen är sådan att man på grund av våldsamt kancellation knappt klarar begärd noggrannhet vid användning av dubbel precision. Vid användning av den metoden måste en mycket detaljerad redovisning av beräkningsfelen ske. Det är därför mycket bättre att serietveckla uttrycket. Notera då att man med hjälp av formeln för halva vinkeln

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x)$$

slipper att kvadrera serietvecklingar. Resultatet blir

$$f(x) = -\frac{1}{12} + \frac{x^2}{90} - \frac{5 \cdot x^4}{12096} + \frac{x^6}{129600} - \frac{x^8}{11404800} + O(x^{10}) + 0,08333$$

Lyckligtvis behövs i praktiken inte så många termer!

Man kan nu angripa problemet på minst två olika sätt:

Metod 1. Direkt metod.

Användes bara termer upp till den kvadratiske termen erhålles en approximation $\bar{x} = \sqrt{\frac{90}{3} \cdot 10^{-5}} = \sqrt{3}/100$. Vi använder detta värde, och ser hur stort felet blir med den metodoberoende feluppskattningen. Vi får då

$$\bar{f}(\bar{x}) = -\frac{1}{12} + 0,08333 + \frac{3 \cdot 10^{-4}}{90} = 0$$

$$|R_T| \leq \frac{5 \cdot 9 \cdot 10^{-8}}{12096} \leq 0,38 \cdot 10^{-10}$$

$f'(x) \approx x/45$ ger $|f'(\xi)| \geq 3,8 \cdot 10^{-4}$. Härav erhålles

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{3,8 \cdot 10^{-11}}{3,8 \cdot 10^{-4}} = 1 \cdot 10^{-7}$$

Om hänsyn togs även till slutavrundning hos närmevärdet till $\sqrt{3}$ erhålles

SVAR: $x^* = 0,0173205 \pm 1,1 \cdot 10^{-7}$

Metod 2. Newton-Raphson.

Som startpunkt för Newton-Raphson väljes att bara ta med upp till den kvadratiske termen, vilket ger $x_0 = \sqrt{\frac{90}{3} \cdot 10^{-5}} \approx 0,01732$. Efter en iteration erhålles $x_1 = 0,017321$. Metodoberoende feluppskattning på detta värde utnyttjar $f(x_1) = 1,52318 \cdot 10^{-10}$ (det är litet petigt att räkna ut detta på ett säkert sätt) och $f'(x_1) = 3,849025 \cdot 10^{-4}$.

Feluppskattningen blir då

$$|x_1 - x^*| \leq \frac{1,6 \cdot 10^{-10}}{3,5 \cdot 10^{-4}} \leq 0,46 \cdot 10^{-6}$$

Jag har således fått ett resultat med sex korrekta decimaler.

Anmärkning: $x^* = 0,017320604731634$

SVAR: $x^* = 0,017321 \pm 0,5 \cdot 10^{-6}$