

- (2p) 1. Närmevärdena $\bar{x} = 2.21$ och $\bar{y} = 12.1$ är korrekt avrundade. Beräkna

$$z = \frac{\cos x}{y}$$

och felet i detta värde. Du får antaga att din räknare utför både den trigonometriska funktionen och divisionen med 10 signifikanta siffror. Dessa fel får således försummas!

Hur många korrekta decimaler och signifikanta siffror har närmevärdet \bar{z} ?

Kommentar: Detta är en uppgift på allmänna felfortplantningsformeln eller maximalfelsuppskattningen. Uppgiften är således att bestämma hur avrundningsfelen i x och y ger upphov till ett fel i z . Dessutom måste hänsyn tas till slutavrundningen. Däremot får beräkningsfelen i uträkningen av cosinus liksom vid divisionen försummas.

Lösning: $\bar{z} = \frac{\cos \bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\cos 2.21}{12.1} = -0.049302192 \dots \approx -0.0493;$

$|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ eller $0.022 \cdot 10^{-4}$, slutavrundningen. Övriga beräkningsfel försummas pga att räkningarna skett med minst 10 signifikanta siffror. Maximalfelsuppskattningen ger:

$$|R_X| = |\Delta z| \lesssim \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| = \frac{|\sin x \cdot \Delta x|}{|y|} + \frac{|\cos x \cdot \Delta y|}{y^2} \leq$$

$$\leq \frac{|\sin 2.21| \cdot 0.005}{12.1} + \frac{|\cos 2.21| \cdot 0.05}{(12.1)^2} \leq$$

$$\leq (3.31 \dots + 2.03 \dots) \cdot 10^{-4} \leq 5.4 \cdot 10^{-4};$$

$$|R_{TOT}| \lesssim |R_B| + |R_X| \lesssim (0.5 + 5.4) \cdot 10^{-4} \leq 6 \cdot 10^{-4}$$

Svar: $z = -0.0493 \pm 0.0006$, dvs två korrekta decimaler och en signifikant siffra.

Kommentar: Hur många decimaler som skall tas med i svaret måste man själv bestämma. Antalet skall stå i rimlig relation till det erhållna felet, slutavrundningen bör ej dominera totalfelet. Man kan utnyttja principen att slutavrundningen är högst en halv enhet i den sista siffran, eller vara petigare och titta på hur stor den är i aktuellt fall. Slutligen skall antalet korrekta decimaler och signifikanta siffror i slutsvaret ges.

En ej rekommenderad metod att lösa problemet är att sätta in $x \pm \Delta x$ och $y \pm \Delta y$ i uttrycket för z och bestämma dess största och minsta värde.

- (5p) 2. Bestäm derivatan av funktionen $f(x)$ i punkten $x = 12$ så noggrant som möjligt utgående från följande tabell med korrekt avrundade funktionsvärden.

x	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0
$f(x)$	1.504971	1.497547	1.493270	1.492206	1.494297	1.499362

Beräkna totalfelet i resultatet!

Bestäm dessutom det tillkommande felet om den punkt där derivatan skall beräknas i stället är $x = 12.0 \pm \epsilon$, där $|\epsilon| \leq 0.01$.

Kommentar: Eftersom derivatan skall bestämmas i vänster ändpunkt kan man inte använda den centrerade differensformeln, utan man måste använda den enklare högerdifferensformeln, som dels inte står i formelsamlingen, och som dels innehåller alla potenser i serieutvecklingen av felet.

Med användning av differensapproximation och efterföljande Richardson-extrapolation kan man på ett enkelt sätt få ett begrepp om trunckeringsfelet. Användning av spline kräver mycket räknearbete i synnerhet om en bra feluppskattning skall göras. Detta gäller även användning av vanlig interpolation för att bestämma derivatan.

Vid beräkning av totalfelet måste dels hänsyn tas till trunckeringsfelet, dels till felet från avrundningsfelet $0.5 \cdot 10^{-6}$ i tabellens funktionsvärden. För de senare måste ett separat extrapolationsschema göras.

Uppgiftens "knorr" med tillkommande felet kräver att en grov uppskattning av derivatans derivata (dvs. funktionens andraderivata) sker.

Lösning:

Osymmetrisk differenskvot och Richardsonextrapolation ger:

h	$D(h)$	$\Delta/1$	$D_2(h)$	$\Delta/3$	$D_3(h)$
0.8	-0.0133425				
0.4	-0.0292525	-0.01591			
0.2	-0.03712	-0.0078675	-0.0451625	0.00005833...	
			-0.0449875		<u>-0.044929...</u>

Minst totalfel (minst $|R_T|$; $|R_{XF}|$ överallt så litet att det inte stör) i $D_3(0.2)$ (understruket):

$$f'(12) \approx -0.0449; \quad |R_T| \lesssim | -0.0449875 + 0.0451625 | = 1.75 \cdot 10^{-4};$$

$$|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-4};$$

R_{XF} fås genom störningsschema: $|R_{XF} \text{ i } D(h)| \leq 2\varepsilon/h$, där $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ (6 korr. dec. i tabellen).

h	$ R_{XF}(D(h)) $	$\Sigma/1$	$ R_{XF} $	$\Sigma/3$	$ R_{XF} $
0.8	$1.25 \cdot 10^{-6}$				
0.4	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$3.75 \cdot 10^{-6}$			
0.2	$5 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$	
			$12.5 \cdot 10^{-6}$		<u>$18.75 \cdot 10^{-6}$</u>

$$|R_{TOT}| \leq (1.75 + 0.5 + 0.1875) \cdot 10^{-4} \leq 2.5 \cdot 10^{-4}$$

Svar 1: $f'(12) = -0.0449 \pm 0.0003$

Tillkommande fel pga fel i indata R_{XX} blir:

$$|R_{XX}| \lesssim |f''(12) \cdot \Delta x| \lesssim 0.08^{(*)} \cdot 0.01 = 8 \cdot 10^{-4}$$

(*) Andraderivatans approximeras med den osymmetriska differenskvoten:

$$D^{(2)}(h) = \frac{f(12) - 2f(12+h) + f(12+2h)}{h^2};$$

Använd (tex) största värdet av $D^{(2)}(0.4) \approx 0.07955$ och $D^{(2)}(0.2) \approx 0.078675$

$$|R_{TOT}| \leq (1.75 + 0.5 + 0.1875 + 8) \cdot 10^{-4} \leq 11 \cdot 10^{-4}$$

Svar 2: $f'(12) = -0.0449 \pm 0.0011$

Kommentar: För det tillkommande felet gäller att man skall använda maximalfelsuppskattningen

$$|R_{XX}| \lesssim \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| = |g'(x)| \cdot |\Delta x|, \text{ där } g(x) = f'(x) \text{ och } x = 12.$$

Observera att man i det här fallet får $g'(x) = f''(x)$.

Notera vidare att $\epsilon = 0.01$ är felet (osäkerheten) i vänstra ändpunktens läge.

Man bör explicit tala om vilket av de erhållna värdena som är bäst. Det är inte alltid det längst till höger i schemat!

- (4p) 3. Ett kemiskt experiment producerar följande sju data-par. Anpassa funktionen $f(x)$ med ett andragradspolynom i minsta kvadratmetodens mening.

x	21	22	23	24	25	26	27
$f(x)$	-1.000	-0.151	+0.894	+0.986	+0.895	+0.500	-0.306

Kommentar: Detta är en standarduppgift på minsta kvadratmetoden. En viktig del av lösningen är att notera att om man utvecklar kring mittpunkten $x = 24$ så erhålles dels en noggrannare lösning och dels enklare räkningar pga att symmetrin ger en matris i normalekvationerna med fyra nollor.

Lösning: Ansats: $f^* = c_0 + c_1(x - 24) + c_2(x - 24)^2$

Med $f(x_i) = f^*(x_i)$ i alla givna punkter erhålles det överbestämda ekvationssystemet $Ac = f$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.151 \\ 0.894 \\ 0.986 \\ 0.895 \\ 0.5 \\ -0.306 \end{pmatrix}$$

Normalekvationerna $A^T Ac = A^T f$ blir:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.818 \\ 3.385 \\ -8.569 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_0 \approx 1.014 \\ c_1 \approx 0.121 \\ c_2 \approx -0.189 \end{cases}$$

Svar: $f^* = 1.014 + 0.121 \cdot (x - 24) - 0.189 \cdot (x - 24)^2$

Kommentar: Eftersom normalekvationerna automatiskt ger en symmetrisk och positivt definit matris är det olämpligt att pivotera denna. Poängavdrag gavs för olämplig ansats.

- (4p) 4. Beräkna följande integral med ett absolut totalfel på högst 0.1.

$$\int_0^1 \frac{1}{4 - \sin 4\pi x} dx$$

Kommentar: Den önskade lösningen är att utnyttja Rombergs metod. Min avsikt var dock att även acceptera en analytisk lösning. Det var dock bara en studerande som gjorde detta, men med hjälp av symbolisk beräkning på fickräknaren. I framtiden kommer jag att skriva "beräkna följande integral numeriskt" för att undvika problemet med avancerade räknare.

Det avsedda problemet med denna uppgift var att, som i labb 3, uppgift 2B, så blir de första approximationerna med trapetsregeln lika (steglängderna 1, 0.5 och 0.25), varför man måste gå åtminstone till steglängden 0.125 för att få en rimlig feluppskattning.

Man kan istället utnyttja periodiciteten till att bara arbeta med halva intervallet (dvs till exempel $[0, 0.5]$) och multiplicera både resultatet och felet med två.

Lösning: Trapetsregeln och Richardsonextrapolation ger (funktionen är periodisk, se upp så att inte avbrott sker i förtid):

h	$T(h)$	$\Delta/3$	$D_2(h)$	$\Delta/15$	$D_3(h)$
1	0.25	0			
0.5	0.25	0	0.25	0	
0.25	0.25	0.00277...	0.25	0.00074...	0.25
0.125	0.25833...		<u>0.26111...</u>		0.26185...

$I \approx 0.261$.

Minst trunkeringsfel fås i understruket värde. Längre till höger i Richardsonschemat \Rightarrow större trunkeringsfel (i detta fall).

$R_T \lesssim |0.25 - 0.25833\dots| \leq 0.0084$; $|R_{XF}|$ försumbart, ty hela räknarens kapacitet användes vid beräkningarna.

$|R_B| \leq 0.0005$, slutavrundningen. $|R_{TOT}| \lesssim 0.0084 + 0.0005 \leq 0.009$

Svar: $I = 0.261 \pm 0.009$

Anm: Problemet löses nästan enklare genom att dela upp i fyra delar

$$\int_0^{0.25} + \int_{0.25}^{0.5} + \int_{0.5}^{0.75} + \int_{0.75}^1$$

där de två sista integralerna är identiska med de två första. Slutresultatet blir detsamma som ovan.

Kommentar: Som synes av lösningen borde jag ha begärt en högre noggrannhet, till exempel ett totalfel om högst 0.02.

En bra alternativ lösning är att dela det ursprungliga intervallet med något annat än 2, till exempel med 3. Då blir inte "nästa värde" från trapetsregeln lika med det föregående. För att få Romberg att fungera måste man då fortsätta med att dela med 3. Räknearbetet blir ungefär detsamma.

- (4p) 5. Din uppgift är här att spela tentaförfattarens roll. Gör en uppgift på “metodoberoende feluppskattning”. Ditt bidrag skall dels bestå av en text att ges på tenta, dels ett lösningsförslag.

Det är en stor fördel om “nyttan” av den metodoberoende feluppskattningen klart framgår.

Kommentar: Detta var ett försök att få fram en ny typ av uppgifter. Det blev emellertid litet extra arbete med att rätta denna uppgift.

Lösning: Ekvationen $f(x) = 0$ beaktas. Uppgiften kan göras på många olika sätt, där tex härledning av den metod-oberoende feluppskattningen kan (men behöver ej) ingå. För att få full poäng krävs att lite mer avancerade felberäkningar skall ingå, som tex fel i indata till $f(x)$ eller trunkeringsfel eller beräkningsfelsanalys. Gör exemplet enkelt, så att det blir överskådligt.

Bra exempel finns i exempelsamlingen: 4:10; 4:14; 4:15 och 4:16.
Exempel utan avancerad feluppskattning: 4.3 och 4.4.

I den nya upplagan av exempelsamlingen är det numren 4.9, 4.7, 4.8, och - (utgått) respektive oförändrat 4.3 och 4.4. Exempel 4.5 bygger på ett svar av en av tentanderna!

Härledning:

Formeln för “metod-oberoende feluppskattning” erhålles ur Taylors formel:

$$f(\bar{x}) = f(x^*) + (\bar{x} - x^*) \cdot f'(\xi)$$

Här är ξ en punkt i intervallet mellan det “gissade” nollstället \bar{x} och det exakta nollstället x^* , och $f(x^*) = 0$. Vi får genom att lösa ut felet att

$$|\bar{x} - x^*| \leq \left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{|f(\bar{x})| + \delta}{M}$$

Här gäller att δ är det totala beräkningsfelet hos $\bar{f}(\bar{x})$ och att M är en underskattning för $|f'(x)|$ i aktuellt intervall. Eftersom \bar{x} skall vara ett nollställe till funktionen $f(x)$ så kan man vänta sig att värdet $f(\bar{x})$ är nära noll, och då kan man inte bara försumma beräkningsfelet.

Notera även att eftersom \bar{x} normalt är ett valt värde så saknar det helt beräkningsfel R_B . Vidare är det viktigt att det är Newton-Raphson som kan användas för att förbättra uppskattningen av ett nollställe \bar{x} , inte den metod-oberoende feluppskattningen med sina belopp och över/underskattningar.

6. Givet är en matris A och en vektor b enligt nedan

$$A = \begin{pmatrix} 9.6 & 27.2 & 146.2 \\ 12.0 & 19.0 & 28.0 \\ 9.6 & 30.2 & 58.4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10.1 \\ 32.8 \\ 61.2 \end{pmatrix}$$

- (2p) a) LR -faktorisera matrisen A med pivotering enligt reglerna.
- (1p) b) Använd LR -faktoriseringen för att lösa ekvationen $Ax = b$.
- (2p) c) Bestäm numeriskt en begränsning för relativa felet i lösningen till problemet i b) då elementen i A anses exakta och då elementen i b är korrekt avrundade. Du får utnyttja att konditionstalet $\kappa_2(A) = 37.1188$.

Kommentar: Detta är den uppgift som jag nästan alltid ger. Den här gången är den litet krångligare eftersom jag gett konditionstalet i 2-norm och inte i maximumnorm. Det var, eftersom jag inte specificerat vilken norm jag ville att relativa felet hos lösningen skulle ges i, valfritt att arbeta i 2-norm eller maximumnorm. I det senare fallet måste då inversen av matrisen A beräknas för att erhålla $\|A^{-1}\|_\infty$. Det givna konditionstalet är nämligen då oanvändbart.

Lösning:

a) Byt rad 1 och 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12.0 & 19.0 & 28.0 & & & \\ 9.6 & 27.2 & 146.2 & & & \\ 9.6 & 30.2 & 58.4 & & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 19 & 28 & & & \\ \hline 0.8 & & & 12 & 123.8 & \\ 0.8 & & & 15 & 36 & \end{array} \right) \sim$$

Rad 2 och 3 bytes:~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 19 & 28 & & & \\ \hline 0.8 & & & 15 & 36 & \\ 0.8 & & & 12 & 123.8 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 19 & 28 & & & \\ \hline 0.8 & & & 15 & 36 & \\ 0.8 & 0.8 & & & & 95 \end{array} \right)$$

$$\text{Svar: } L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0.8 & 1 & & & & \\ 0.8 & 0.8 & 1 & & & \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 28 \\ & 15 & 36 \\ & & 95 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } Ly = Pb \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 32.80 \\ 34.96 \\ -44.108 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \approx \begin{pmatrix} -1.6379 \\ 3.4450 \\ -0.4643 \end{pmatrix}$$

c) Vi har:

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \leq 37.12 \frac{\sqrt{3} \cdot 0.05}{\sqrt{10.1^2 + 32.8^2 + 61.2^2}} \leq 0.0459$$

Om man använder maximumnorm finner man att $\kappa_\infty(A) = 54.66$.

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 54.66 \frac{0.05}{61.2} \leq 0.04466$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 0.046 \text{ eller } \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 0.045$$

Kommentar: En avsiktlig svårighet var här att konditionstalet getts i 2-norm, medan jag i undervisningen *mest* använde maximumnorm. Observera att $\|\delta b\|_2 = \sqrt{|\Delta b_1|^2 + |\Delta b_2|^2 + |\Delta b_3|^2} \leq \sqrt{3 \cdot 0.05^2} = \sqrt{3} \cdot 0.05$ medan $\|\delta b\|_\infty = \max |\Delta b_i| \leq 0.05$.

(6p) 7.

Skriv- och läshuvudet till ett skrivminne berör inte den magnetiska skivan utan är på ett avstånd ungefär en μ (en tusendels millimeter). När skivan roterar dras luft in i det kilformade gapet, vilket ökar lufttrycket och därför ytterligare separerar huvudet och skivan, dvs minskar risken att den magnetiska skivan skadas.

Följande ekvation (där jag dock tagit bort den krångligaste termen) beskriver lufttrycket $p(x)$ som funktion av läget.

$$p''(x) = \frac{1}{p(x)} [p'(x)^2 + 3k'(x)k(x)^2 p'(x)]$$

Här antages bredden på skrivhuvudet vara en enhet, så att $0 \leq x \leq 1$.

Vi betraktar problemet som ett begynnelsevärdesproblem

$$p(0) = 1$$

$$p'(0) = 0.1$$

och antar att kilen bestäms av funktionen

$$k(x) = 0.001 + 0.003 \cdot x$$

Lös detta begynnelsevärdesproblem med Eulers metod och steglängderna $h = 1/2$ och $h = 1/3$ och gör en Richardsonextrapolation för att bestämma en bättre approximation till $p(1)$.

Anmärkning: Som längdenhet använder jag en millimeter, men det behöver du inte bry dig om!

Kommentar: Detta är en uppgift på andra ordningens begynnelsevärdesproblem, som bör omvandlas till ett system av första ordningens.

Lösning: Omskrivning som ett system ger

$$p'(x) = q(x)$$

$$q'(x) = \frac{q(x)}{p(x)}[q(x) + 3k'(x)k(x)^2]$$

med begynnelsevärdena $p(0) = 1, q(0) = 0.1$. Löses med Eulers metod.

$$p_{n+1} = p_n + h \cdot q_n = p_n + h \cdot f_1$$

$$q_{n+1} = q_n + h \cdot \frac{q_n}{p_n}[q_n + 3k'(x_n)k(x_n)^2] = q_n + h \cdot f_2$$

h	n	x_n	p_n	f_1	q_n	f_2
1/2	0	0	1	0.1	0.1	0.01
	1	1/2	1.05	0.1050...	0.1050...	0.0105...
	2	1	1.10250... $\approx p(1)$			
1/3	0	0	1	0.1	0.1	0.01
	1	1/3	1.03333...	0.10333...	0.10333...	0.01033...
	2	2/3	1.06778...	0.10678...	0.10678...	0.01068...
	3	1	1.10337... $\approx p(1)$			

Richardsonextrapolation: $R_T = c_1 h^1 + c_2 h^2 + \dots$; steglängdskvot=3/2. Vi

$$\text{får } \frac{\Delta}{q^p - 1} = \frac{\Delta}{(\frac{3}{2})^1 - 1} = \frac{\Delta}{1/2} = 2\Delta$$

h	$p(1)$	2Δ
1/2	1.10250...	0.00174...
1/3	1.10337...	1.10511...

$$|R_T| \approx |1.10337 - 1.10250| = 0.00087$$

Svar: $p(1) \approx 1.105$; $|R_T| \leq 0.001$

Kommentar:

Den ovanliga steglängdskvoten vållade faktiskt inga problem. Jag valde två respektive tre steg för att få ned räknearbetet.

Som vanligt med differentialekvationer är det viktigt att hålla reda på hur många steg som skall göras. “För många steg” är extra olönsamt (mer arbete, mindre poäng). Även “för få steg” ger naturligtvis poängavdrag.

Steglängderna i uppgiften är egentligen för stora, vilket ger dålig noggrannhet. Dessutom bidrar inte den sista termen $3k'k^2$ vid användning av låg precision.

Felberäkning var inte begärd, varför $|R_T|$ inte behövde beräknas.