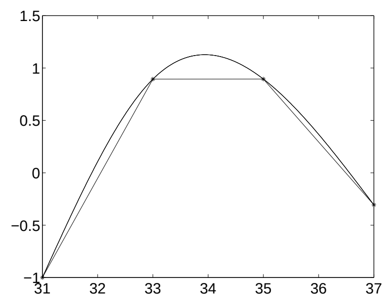
Svar TANA39 Numeriska metoder M och Mx – 99–04–15 /uo/be

1. $T(h) = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right)$, där $h = (b-a)/n$.
   Förutsättning: $|\Delta f(x)| \le \varepsilon$, för alla $x \in [a,b]$.
   $|R_{XF}| = |\Delta T| \le h\left(\frac{1}{2}|\Delta f_0| + |\Delta f_1| + \cdots + |\Delta f_{n-1}| + \frac{1}{2}|\Delta f_n|\right) \le h(\frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon + \cdots \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon) \le hn\varepsilon = (b-a)\varepsilon$
   Svar: $|R_{XF}| \le (b-a)\varepsilon$, gäller även om man gör Richardsonextrapolation.

2. Genom att lösa följande ekvationssystem erhålles $s_i'' = z_i$.

   $h = 2;\ z_1 = z_4 = 0.$
   $2z_1 + 8z_2 + 2z_3 = 6\big((f_3 - f_2)/2 - (f_2 - f_1)/2\big) = -5.679$
   $2z_2 + 8z_3 + 2z_4 = 6\big((f_4 - f_3)/2 - (f_3 - f_2)/2\big) = -3.606$
   Vi får: $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5.679 \\ -3.606 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_2 = -0.6370 \\ z_3 = -0.2915 \end{pmatrix}$

   s_2' fås ur $(i=2)$: $s_2' = (f_3 - f_2)/2 - 2z_3/6 - 2z_2/3$
   $= 0.0005 + 0.2925/3 + 1.274/3 = 0.52233\ldots$
   $s(34)$ fås för $i = 2$: $s(34) = f_2 + s_2' + 0.5z_2 + (z_3 - z_2)/12$
   $= 0.894 + 0.52233\ldots - 0.3185 + 0.02879\ldots = 1.126625$
   Pga den starka lutningen i början och slutet är lösningen rimlig trots att $f(34)$ är ganska mycket större än $f(33) \approx f(35)$.
   Svar: $s(34) = 1.126625$



Figur 1: Interpolerande kubisk resp. linjär spline-funktion.

3. (a) Utför Gausseliminationen utan pivotering
   $$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 60 & 140 \\ 30 & 140 & 450 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 20 & 80 \\ 3 & 80 & 360 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 20 & 80 \\ 3 & 4 & 40 \end{pmatrix}$$
   Svar: Alla diagonalelementen i R är positiva, vilket medför att den symmetriska matrisen A är positivt definit.

   (b) Svar: $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 20 & \\ & & 40 \end{pmatrix}$, där $DL^T = R$.

   (c) $Ly = b \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 10.1 & 12.6 & -19.5 \end{pmatrix}^T$
   $Dz = y \quad \Rightarrow \quad z = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.36 & -0.4875 \end{pmatrix}^T$
   $L^Tx = z \quad \Rightarrow$ Svar: $x \approx \begin{pmatrix} -2.6875 & 2.58 & -0.4875 \end{pmatrix}^T$

   (d) $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 620 \cdot 1.65 = 1023; \quad \|\delta A\|_\infty \le 0.01 \cdot 3 = 0.03$
   Vi har: $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \dfrac{\kappa_\infty(A)}{1 - \|\delta A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty} \cdot \dfrac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \le \dfrac{1023}{1 - 1.65 \cdot 0.03} \cdot \dfrac{0.03}{620} \le 0.053;$ Svar: $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 0.053$

4. Grovuppsökning ger $x^* \approx \pm 1.2$; $f(x) = x^2 - 4 \cdot \cos x$; $f'(x) = 2x + 4 \cdot \sin x$;
   Funktionen är symmetrisk, så det räcker med att bestämma den positiva roten.

   (a) Newton Raphson $\left(x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ ger:
   $x_0 = 1.2;\quad x_1 = 1.2015389649\ldots;\quad x_2 = 1.201538299\ldots;$ Välj $\bar{x} = 1.2015$.
   Metodoberoende feluppskattningen: $|x_a^* - 1.2015| = \dfrac{|f(1.2015)|}{|f'(\xi)|} \le \dfrac{2.4 \cdot 10^{-4}}{6.1} \le 0.4 \cdot 10^{-4}$.
   Överskatta täljaren: $|f(1.2015)| = |-2.349\ldots \cdot 10^{-4}| \le 2.4 \cdot 10^{-4}$;
   Underskatta $|f'(\xi)|,\ \xi \in (\bar{x}, x^*)$. Välj $\min(\ |f'(1.2)| = 6.454\ldots, |f'(1.21)| = 6.162\ldots\ )$
   Svar: $x_a^* = \pm 1.2015 \pm 0.4 \cdot 10^{-4}$. Vi har alltså fyra (dvs mer än tre) korrekta decimaler.

   (b) Fel pga fel i $A = 4 \pm 0.02$ tillkommer. Felet i f pga fel i A blir:
   $|\Delta f| = |R_X(f)| \le \left|\dfrac{\partial f}{\partial A}\right| |\Delta A| = |\cos x||\Delta A| \le 0.361 \cdot 0.02 \le 7.3 \cdot 10^{-3}$
   Metodoberoende feluppskattningen: $|x_b^* - 1.2015| = \dfrac{|f(1.2015)|}{|f'(\xi)|} \le \dfrac{(0.24 + 7.3) \cdot 10^{-3}}{6.1} \le 1.3 \cdot 10^{-3}$.
   Svar: $x_b^* = \pm 1.2015 \pm 1.3 \cdot 10^{-3}$ och vi har nu bara två korrekta decimaler. Felet minskar bara marginellt om vi har ett $\bar{x}$ som ger $\bar{f}(\bar{x}) = 0$, dvs vi kan högst få två korrekta decimaler.

5. Trapetsregeln och Richardsonextrapolation ger:

h	$T(h)$	$\Delta/3$	$T_2(h)$	$\Delta/15$	$T_3(h)$
0.8	1.1997072				
		$-0.0008485\ldots$			
0.4	1.1971616		$1.1963130\ldots$		
		$-0.0002100\ldots$		$0.0000005\ldots$	
0.2	1.1965314		$1.1963213\ldots$		<u>$1.1963218\ldots$</u>

$I \approx 1.196322$; $\quad |R_T| \lesssim |1.1963213\ldots - 1.1963130\ldots| = 0.83 \cdot 10^{-5}$

$|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-6}$ (Slutavrundningen)

$R_{XF} \leq (b-a)\varepsilon \leq 0.8 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} = 0.4 \cdot 10^{-6}$, där ε är övre gräns för felet i givna funktionsvärden.

$|R_{TOT}| \leq (0.83 + 0.05 + 0.04) \cdot 10^{-5} \leq 10^{-5}$ <u>Svar</u>: $I = 1.196322 \pm 10^{-5}$

Fel pga fel i indata, R_{XX}, blir: $|R_{XX}| \lesssim \left|\frac{\partial I}{\partial b}\right| \cdot |\Delta b| = |f(b)| \cdot |\Delta b| \leq 1.5 \cdot 0.0002 = 3 \cdot 10^{-4}$

<u>Svar</u>: Tillkommande fel: $|R_{XX}| \lesssim 3 \cdot 10^{-4}$

6. (a) Omskrivning som ett system ger

$u'(x) = v(x)$

$v'(x) = \frac{v(x)}{u(x)} \cdot [v(x) + 0.7 \cdot x \cdot u(x)]$

med begynnelsevärdena $u(0) = 2$, och $v(0) = 0.8$.

Löses med Eulers metod.

$u_{n+1} = u_n + h \cdot v_n$

$v_{n+1} = v_n + h \cdot \frac{v_n}{u_n} \cdot [v_n + 0.7 x_n u_n]$

h	n	x_n	u_n	v_n	hv_n	$hv_n(v_n + 0.7x_nu_n)/u_n$
0.5	0	0	2	0.8	0.4	0.16
	1	0.5	2.4	0.96	0.48	
	2	1	$\boxed{2.88 \approx u(1)}$			
0.25	0	0	2	0.8	0.2	0.08
	1	0.25	2.2	0.88	0.22	0.1265
	2	0.5	2.42	1.0065	0.251625	$0.19272\ldots$
	3	0.75	2.671625	$1.19922\ldots$	$0.29980\ldots$	
	4	1	$\boxed{2.971430 \approx u(1)}$			

<u>Svar</u>: $y(1) \approx 2.971430$

(b) Richardsonextrapolation: $R_T = c_1 h^1 + c_2 h^2 + \ldots$;.

h	$y(1)$	$\Delta/1$	$y(1)$	$\Delta/3$	$y(1)$
0.5	2.88				
		0.09143			
0.25	2.971430		3.06286		
		0.071106		$0.016927\ldots$	
0.125	3.042536		3.113642		<u>$3.13057 \approx y(1)$</u>

<u>Svar</u>: $y(1) \approx 3.13057$

(c) Om vi enbart använder Euler kan trunkeringsfelet i $y_{h=0.125}(1)$ uppskattas med:

$|3.042536 - 2.971430| \approx c \cdot h^1 = c \cdot 0.125 \;\Rightarrow c \approx 0.57$.

För att få ett trunkeringsfel $\sim 10^{-6}$ krävs en steglängd $h \approx 10^{-6}/c \approx 1.75 \cdot 10^{-6}$

<u>Svar</u>: $h \approx 1.75 \cdot 10^{-6}$

7. Beräkningsfelsanalysen: se exempelsamlingen ex: 2∗31 b) och c). Målet är att jämföra Fall 1 och Fall 2 och då behöver man inte ta hänsyn till lagringsfelen i a och b, eftersom deras inverkan på resultatet blir lika i de båda fallen.

<u>Svar</u> med kommentarer:

Beräkningsfelet i $(a^2 - b^2)$ blir $\lesssim \mu \cdot (a^2 + b^2 + |a^2 - b^2|)$. Detta fel kan bli mycket stort i förhållande till resultatet om $a \approx b$, dvs då $|a^2 - b^2| \ll a^2 + b^2$

Beräkningsfelet i $(a-b)(a+b)$ blir $\lesssim 3\mu \cdot |a^2 - b^2|$, vilket alltid ger ett litet relativt fel på högst 3μ.

Fall 2 lönar sig om $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{|a|}{|b|} < \sqrt{3}$.

Om inte a/b ligger i detta intervall så är skillnaden mellan de båda fallen inte speciellt stor. Alltså är det lämpligt att alltid använda Fall 2.