1.a) Observera att

$$f(x) = \left(\sqrt{x^4+4} - 2\right) \frac{\sqrt{x^4+4}+2}{\sqrt{x^4+4}+2} = \frac{x^4}{\sqrt{x^4+4}+2} \approx \frac{x^4}{4}. \tag{1}$$

Betrakta fel genom varje felkälla:

$$\begin{aligned}
&x^4 \Rightarrow g(a) = \sqrt{a+4} - 2 \Rightarrow |\Delta g| \lesssim \frac{1}{2\sqrt{a+4}}|\Delta a| = \frac{a}{2\sqrt{a+4}}\frac{|\Delta a|}{a} \leq \frac{x^4}{4}\mu, \\
&+ \Rightarrow g(a) = \sqrt{a} - 2 \Rightarrow |\Delta g| \lesssim \frac{1}{2\sqrt{a}}|\Delta a| \leq \frac{\sqrt{a}}{2}\mu \approx \mu, \\
&\sqrt{(\,.\,)} \Rightarrow g(a) = a - 2 \Rightarrow |\Delta g| \lesssim |\Delta a| \leq a\mu \approx 2\mu, \\
&- \Rightarrow g(a) = a \Rightarrow |\Delta g| \lesssim |\Delta a| \leq a\mu \approx \frac{x^4}{4}\mu.
\end{aligned}$$

Superpositionsprincipen ger

$$|\Delta f| \lesssim \mu\left(2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3\right).$$

Relativa felet i f kan uppskattas

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} \lesssim \mu\left(2 + \frac{12}{x^4}\right).$$

b) Se (1).

2.a) För en naturlig spline gäller $z_1 = z_4 = 0$. Vidare,

$$2(1+2)z_2 + 2z_3 = 6 * (-8), \tag{2}$$

$$2z_2 + 2(2+1)z_3 = 6 * (-8). \tag{3}$$

b) Lösningen till (2,3):

$$z_2 = z_3 = -6.$$

Då är

$$s_2'(x_2) = 6\frac{2}{6} + 6\frac{2}{3} = 6.$$

Vi får

$$s_2(x) = 8 + 6(x+1) - 3(x+1)^2,$$

så att

$$s_2(0) = 8 + 6 - 3 = 11.$$

3.a) Sekantmetoden ger $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.4776$. Metodoberoende feluppskattningen ger

$$|x_3 - x^*| \lesssim \frac{|f(x_3)|}{|f'(x_3)|} < \frac{0.0045}{4} < 0.0012.$$

b) Approximationen x_n beräknas enligt

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

För att få x_2 behövs 2 funktionsberäkningar. För att få varje x_n, $n \geq 3$, behövs ytterligare 1 funktionsberäkning. Totalt behövs N funktionsberäkningar.

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.8033\,(2\sqrt{2})^{-1} \\ 1 & -0.8033\,(4\sqrt{4})^{-1} \\ 1 & -0.8033\,(6\sqrt{6})^{-1} \\ 1 & -0.8033\,(8\sqrt{8})^{-1} \\ 1 & -0.8033\,(10\sqrt{10})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.68 \\ 4.37 \\ 3.74 \\ 3.46 \\ 3.34 \end{pmatrix}.$$

b) Normalekvationerna är

$$\begin{pmatrix} 5 & -0.500 \\ -0.500 & 0.0956 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.6 \\ -2.75 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

$$C = -12.9$$

$$A = 3.03$$

5. Centrala differensapproximationer till $f'(0)$ ger $F_1(h)$, $h = 0.09$, $h = 0.03$ och $h = 0.01$. Extrapolation med parametrarna $q = 3$ och $p = 2$ respektive $p = 4$ ger

h	$F_1(h)$	$F_2(h)$	$F_3(h)$
0.09	2.0556		
0.03	2.0000	1.9931	
0.01	2.5000	2.5625	2.5696

Felkällor:
1. Trunkeringsfel. Minskar vid upprepad Richardsonextrapolation.
2. Fel i indata $f(x)$ ger ett fel $|R_{XF}| \leq \frac{\epsilon}{h}$, vilket blir 0.5 vid den minsta steglängden. Det första värdet bör därför vara bäst.

6.a) Sätt $t = \sqrt{2 - x}$. Då fås

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} 2\exp(t^2 - 2)dt = \int_0^{\sqrt{2}} g(t)dt.$$

b) Det gäller

$$|R_T| \leq \frac{h^2}{12}\sqrt{2}\max_t |g''(t)|.$$

Vi har

$$g''(t) = 2(4t^2 + 2)\exp(t^2 - 2), \qquad |g''| \leq 20.$$

Därför är $|R_T| \leq 0.05$ om

$$h \leq \left(\frac{0.05 \cdot 12}{\sqrt{2} \cdot 20}\right)^{1/2} \leq 0.145.$$

Detta motsvarar ungefär

$$\sqrt{2}/0.145 \leq 10$$

delintervall av intervallet $(0, \sqrt{2})$.

$$k_1 = 3, \qquad k_2 = 7.5, \qquad k_3 = 3, \qquad k_4 = 15,$$

$$y(2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 8.5.$$

b) För Eulers metod gäller

$$|R_T| \approx Ch, \qquad 0.13 \approx C \cdot 0.1 \Rightarrow C \approx 1.3.$$

Därför,

$$|R_T| < 0.5 \cdot 10^{-6} \qquad \text{om } h \lesssim 3.8 \cdot 10^{-7}.$$

För Runge-Kuttas metod gäller

$$|R_T| \approx Ch^4, \qquad 2.4 \cdot 10^{-5} \approx C \cdot 0.1^4 \Rightarrow C \approx 0.24.$$

Därför,

$$|R_T| < 0.5 \cdot 10^{-6} \qquad \text{om } h \lesssim 0.038.$$

c) Eulers metod kräver en funktionsberäkning per steg. Totalt krävs

$$1/\left(3.8 \cdot 10^{-7}\right) \approx 2\,600\,000$$

funktionsberäkningar.

Runge-Kuttas metod kräver fyra funktionsberäkningar per steg. Totalt krävs

$$4/0.038 \approx 105$$

funktionsberäkningar.