LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Numerisk analys/Bo Einarsson/TP

Tentamensanvisningar för

TANA39/40 Numeriska metoder för M och Mx 1996-04-15 kl 14.00–19.00

Allmänt: Tentamen består dels av 12 teorifrågor dels av 5 problem. Varje rätt besvarad teorifråga ger 1 poäng. Poängantalet för problemen anges i marginalen. För godkänt krävs minst 4 poäng på teoridelen och minst 14 poäng på problemdelen, och tillsammans minst 20 poäng av totalt 50. På varje inlämnat blad får endast förekomma ett problem (gäller endast problemdelen). Skriv endast på papperets ena sida. Skriv tydligt namn och linje på varje blad, samt facknummer på omslaget.

Hjälpmedel:
1. Formelsamling i Numerisk Analys (författare: Eldén, Wittmeyer-Koch, Skoglund)
2. Matematisk tabell (TEFYMA eller Standard Math. Tables eller Physics Handbook)
3. Högst två räknedosor utan instruktionsböcker.

Obs! Redovisa beräkningar, delresultat, härledningar, felkalkyl etc. Enbart svar ger normalt inga poäng (även om det är rätt).

Resultat anslås förhoppningsvis 22 april.

Jourhavande lärare: Bo Einarsson, tel 28 14 32

Lycka till!

Numeriska metoder för M och Mx, del I 1996-04-15 kl 14–19

(2p) 1–2. Storheterna a och b har lagrats i en dator med flyttalssystemet (β, t, L, U). Båda ryms inom det normala talområdet men har troligen ett visst avrundningsfel.
Vi förutsätter att de elementära räknesätten och de trigonometriska funktionerna är implementerade med full precision (dvs erforderliga delberäkningar utförs i utvidgad precision, med slutavrundning till flyttalssystemet).
Hur stort blir relativa och absoluta felen vid beräkning av

$$\sin(a \cdot b)$$

om $a \approx 0{,}5$ och $b \approx 2$?
Svaret skall uttryckas med siffror och avrundningskonstanten, inga andra bokstäver.

3. Flyttalet $x = (-1)^s(1.f)2^{e-127}$ lagras enligt IEEE som

s	e	f	
1	8	23	bitar

Ange tydligt hur talet $-12{,}5625$ lagras som flyttal.

4. Hur många termer behöver medtagas i serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 5 \cdot \frac{1 + \sin\frac{1}{n}}{n^2}$$

för att summan skall kunna erhållas med sjutton korrekta decimaler.

(2p) 5–6. En symmetrisk differensformel för förstaderivatan $f'(x)$ är

$$D(h) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}.$$

Bestäm serieutvecklingen av trunkeringsfelet

$$R_T = D(h) - f'(x)$$

som

$$R_T = a_1h^1 + a_2h^2 + a_3h^3 + \ldots.$$

Bestäm explicit det första a_i som är skilt från noll.

7. En viss numerisk metod har använts för att beräkna en viss storhet. Tre olika steglängder har använts. Vilken är approximationsordningen? Den är ett heltal!

Steglängd	Resultat
4	28,6
1	3,1
0,25	3,0

(2p) 8–9. Vid linjär interpolation mellan $(x_1; y_1)$ och $(x_2; y_2)$ blir felet beroende på osäkerhet i y-värdena (högst ε) likaså högst ε.
Här är

$$|\bar{y}_1 - y_1| \leq \varepsilon$$
$$|\bar{y}_2 - y_2| \leq \varepsilon$$

Bestäm felet beroende på osäkerhet i y-värdena vid linjär **extra**polation!
Uttryck felet i x, x_1, x_2 och ε.

(2p) 10–11. Bestäm det negativa nollstället till funktionen

$$f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2$$

med tre korrekta decimaler.
Fullständig felberäkning!

12. Man vill använda fixpunktsiteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ för att beräkna sjunde roten ur ett positivt tal $a > 1$. Ange vilken av följande två metoder som bör användas? Motivera svaret!

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{1}{7}x + \frac{6a}{7x^6} \\
\varphi_2(x) &= \frac{6}{7}x + \frac{a}{7x^6}
\end{aligned}$$

Numeriska metoder för M och Mx, del II 1996-04-15 kl 14–19

(6p) 13. a) Beräkna integralen $\int_{-4}^{+4} y(x)\,dx$ så noggrant som möjligt. Funktionen $y(x)$ ges i nedanstående tabell. Här betraktas x-värdena som exakta och y-värdena är korrekt avrundade. Svaret skall ges med tre decimaler. Fullständig felberäkning erfordras.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y(x)$	64,806	75,480	85,894	96,062	105,992	115,698	125,187	134,470	143,555

(2p) b) I detta fall skall i stället integralen $\int_{-\alpha}^{+\beta} y(x)\,dx$ beräknas. Storheterna α och β är båda ungefär 4. Hur stort blir det tillkommande felet pga att de ej är exakt 4?

14. Vi utnyttjar tabellen i uppgift 13 även här.

(4p) a) Bestäm med linjär interpolation värdet $y(1{,}3)$. Gör en fullständig felberäkning!

(3p) b) Använd **samtliga** punkter, för att bestämma en rät linje som så väl som möjligt ansluter till dessa punkter. Utnyttja därvid lösning av ett överbestämt ekvationssystem i minsta kvadratmetodens mening.
Ange den erhållna räta linjen. Ingen felberäkning.

(1p) c) Vilket värde ger den räta linjen i b) för $x = 1{,}3$? Ingen felberäkning.

(3p) 15. a) Lös följande ekvationssystem $Ax = b$ med Gausselimination och pivotering enligt reglerna. Räkna exakt!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

(2p) b) Ange den erhållna LR-faktoriseringen.

(2p) c) Om man istället använder flyttalsaritmetik erhålles vissa avrundningsfel. Antag att Du använder IEEE i enkel precision. Hur stort blir felet i lösningen x från enbart avrundningsfelet i högerledet b? Ange både absoluta och relativa felen!
Ledning $\|A^{-1}\|_\infty = 1$.

(8p) 16. En kropp med massan $M = 0{,}5$ kg är fäst i en fjäder, vars andra ände är fastsatt i något som ej rör sig. Kroppen får ett rörelsemotstånd $R = -B\frac{dy}{dt}$ från luften, där $B = 10$ kg/s är en dämpningskonstant. Fjäderns strängkonstant är $k = 100$ kg/s^2.

Rörelseekvationen är

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

och startvärden är $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Beräkna läget y efter 0,05 sekunder med Runge-Kuttas metod och steglängden 0,025.

(7p) 17. Bestäm det minsta positiva nollstället till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left[1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{x}{2} - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right] + 0{,}08333$$

med sex korrekta decimaler. Fullständig felberäkning krävs naturligtvis. Härvid betraktas dock 0,08333 som en exakt konstant!