TANA40 Numeriska metoder för M 1996-05-28

(3p) 1. Vi vill beräkna approximationer till nedanstående seriesummor. Hur många termer måste vi summera i respektive serie för att få närmevärden med fem korrekta decimaler?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

(3p) 2. (a) Bestäm $f(3)$ genom att approximera med den naturliga kubiska splinefunktion som interpolerar

x	0	1	2	4
$f(x)$	2	2	4	9

(b) Jämför med att bestämma $f(3)$ med hjälp av ett interpolerande tredjegradspolynom. (Feluppskattning krävs ej.)

(3p) 3. $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{3+x}\,dx$ skall beräknas på följande sätt:

$$I = I_1 + I_2 \text{ där } I_1 = \int_0^{3} \frac{e^{-x^2}}{3+x}\,dx \text{ och } I_2 = \int_3^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{3+x}\,dx$$

Använd datorkörningen nedan (avser I_1) för att ange värdet av I med feluppskattning. Alla ingående fel skall motiveras.

```
Resultat: 0.25193182079601
Antal funktionsber: 33

  Columns 1 through 4

   3.00000000000000   0.50003085245102                  0                  0
   1.50000000000000   0.28514850107947   0.21352105062228                  0
   0.75000000000000   0.25743506054699   0.24819724703616   0.25050899346375
   0.37500000000000   0.25324930436438   0.25185405230351   0.25209783932134
   0.18750000000000   0.25225799353584   0.25192755659299   0.25193245687896
   0.09375000000000   0.25201316385763   0.25193155396489   0.25193182045635

  Columns 5 through 7

                  0                  0                  0
                  0                  0                  0
                  0                  0                  0
   0.25212305909686                  0                  0
   0.25192983176083   0.25192907400657                  0
   0.25193181035440   0.25193181811360   0.25193182079601
```

(4p) 4. (a) Ekvationen

$$f(x) = e^{ax} - \frac{e^{0.9}}{0.9}x = 0, \qquad a = 1 \pm 10^{-3}$$

har en rot nära 0.899917. Uppskatta felet i detta närmevärde.

(b) Låt $g(x) = e^x - e^{0.9}(x + 0.1)$. Newton-Raphsons metod ger följande talföljd vid bestämning av nollstället till $g(x)$:
$x_0 = 0.85$, $x_1 = 0.8752...$, $x_2 = 0.8876...$, $x_3 = 0.8938...$, $x_4 = 0.8969...$
Förklara och visa varför metoden konvergerar långsamt.

(5p) 5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 2/7 & -6/7 \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

(a) Är matrisen positivt definit?

(b) LR-faktorisera matrisen A.

(c) Vi vill lösa $Ax = b$. Vilket kan ge störst fel, att avrunda samtliga matriselement till 5 decimaler eller att avrunda värdena i högerledet till 6 decimaler? ($||A^{-1}||_\infty = 5.6$)

(d) Visa hur man löser $CX = B$ på ett effektivt sätt. C, X och B är $n \times n$-matriser. Hur många operationer krävs?

(6p) 6. Betrakta gittret $x = (0; 1; 3; 5; 7)$. Ange massmatrisen K_0 och styvhetsmatrisen K_1 då man använder linjära element (basfunktioner) φ_j normerade så att $\varphi_j(x_j) = 1$. Det gäller att $q = 6$.

7. Nedanstående tabell är given. Funktionsvärdena är exakta.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	1.4794	1.5646	1.6442	1.7174	1.7833

Vi önskar bestämma $f'(1.01)$.

(3p) (a) Utgående från kursens innehåll, diskutera vilka möjligheter som finns då feluppskattning inte krävs.

(3p) (b) Beräkna $f'(1.01)$ med feluppskattning.