LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Numerisk analys/Bo Einarsson/TP

Tentamensanvisningar för

TANA39/40 Numeriska metoder för M och Mx 1997-03-17 kl 14.00–19.00

Allmänt: Tentamen består av sju uppgifter.

Uppgifterna ger markerat antal poäng om de är helt korrekt lösta med **motiveringar och delresultat**. Maximalt poängantal är 30.

För godkänt krävs minst 12 poäng.
För betyg 4 krävs minst 18 poäng.
För betyg 5 krävs minst 24 poäng.

Hjälpmedel:
1. Formelsamling i Numerisk Analys (Eldén, Wittmeyer-Koch, Skoglund)
2. TEFYMA (Ingelstam, Rönngren, Sjöberg)
3. Standard Mathematical Tables *eller* Physics Handbook
4. Högst två räknedosor, utan instruktionsböcker.

Jourhavande lärare: Bo Einarsson, tel 28 14 32

Resultatet anslås senast tisdagen den 2 april på matematiska institutionens anslagstavla, ingång B23, bv.

Lycka till!

(2p) 1. Beräkna

$$e^a \cdot \sin c + e^{-a} \cdot \sin b$$

där $a = 1{,}50$; $b = 0{,}01$ och $c = 2{,}00$ är korrekt avrundade.

Bestäm antalet korrekta decimaler och signifikanta siffror i resultatet.

(2p) 2. Hur många termer behöver tagas med i beräkningen av

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n} \cdot \sin \frac{1}{n}$$

för att resultatet skall få två signifikanta siffror?

(2p) 3. Bestäm approximationsordningen p och trunkeringsfelet R_T hos följande approximation till andraderivatan

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)\right] - R_T\,.$$

Ange R_T på formen $a_p h^p + a_{p+1} h^{p+1} + a_{p+2} h^{p+2} + \ldots$ och ge värdena på p och $a_p \neq 0$ (däremot behövs ej värdena på a_{p+1} och följande koefficienter).

Ange även (med motivering) tillhörande formel för inverkan från avrundningsfelet, R_{XF}.

(3p) 4. a) Följande tabell, med exakta x-värden och korrekt avrundade y-värden, är given. Beräkna integralen över intervallet så noggrant som möjligt.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,99750	0,97763	0,93847	0,88120	0,80752

Gör en fullständig felberäkning.

(3p) b) Ange tre väsentligt olika sätt att numeriskt beräkna

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^x \, dx\,.$$

Jämför för- och nackdelar med de tre metoderna och ange, med motivering, vilken av dessa du skulle föredra.

5. Givet är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}240 & 0{,}880 & 19{,}880 \\ 0{,}940 & 3{,}300 & 50{,}970 \\ 2{,}000 & 7{,}000 & 99{,}000 \end{pmatrix}.$$

(2p) a) LR-faktorisera matrisen med partiell pivotering enligt våra regler.

(1p) b) Lös $Ax = b$, där

$$b = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 0{,}48 \\ 0{,}94 \end{pmatrix}.$$

(2p) c) Antag att både A och b är korrekt avrundade. Hur stort blir högst det därav orsakade relativa felet i lösningen x?
Du får använda att $\|A^{-1}\|_\infty = 527{,}0512$.

6. Givet begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}05 \cdot x \cdot \sin(x \cdot y) + x\,, \qquad y(3) = 0\,.$$

(3p) a) Bestäm närmevärdet till $y(4)$ utnyttjande Eulers metod och steglängderna 1; 0,5 och 0,25. Räkna med minst sex decimaler.

(1p) b) Använd Richardsonextrapolation för att få bättre värden på $y(4)$.

(2p) c) Använd Runge-Kuttas metod med steglängden 1, för att få ett nytt värde på $y(4)$. Räkna med minst sex decimaler.

(1p) d) Med Runge-Kuttas metod och steglängden $h = 0{,}25$ erhålles $y(4) \approx 3{,}508678$. Använd det i c) erhållna värdet för att göra en Richardsonextrapolation.

7. Betrakta följande modifikation av Netwton Raphson's metod,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{D(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

där

$$D(x) = \frac{f\left(x + f(x)\right) - f(x)}{f(x)}.$$

(3p) a) Lös ekvationen $f(x) = x - \ln x - 2 = 0$ med metoden. Använd startvärdet $x_0 = 0{,}16$ och avbryt när $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$. Skatta felet i din approximation utan att analytiskt derivera f.

(1p) b) Visa, att om en iterationsmetod $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ uppfyller

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$$

har metoden minst konvergensordningen p för enkelroten $x = x^*$. Vi antar att $\varphi(x)$ är p gånger kontinuerligt deriverbar.

(2p) c) Visa, att metoden ovan har minst kvadratisk ($p \geq 2$) konvergensordning. Du får använda att $f(x) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{D(x)}\right) = 0$ för $x = x^*$.