Matematiska institutionen
Numerisk analys/Wilhelm Lenferink/Bo Einarsson

Tentamensanvisningar för

NUMERISKA METODER FÖR M och MX

Kursbeteckning: TANA39

Tentamensdatum: 1999-10-18

Tentamenstid: 8:00–13:00

Hjälpmedel

Eldén, Wittmeyer-Koch och Skoglund:
Formelsamling till Numerisk analys-en introduktion
TEFYMA (Ingelstam, Rönngren, Sjöberg)
Standard Mathematical Tables *eller* Physics Handbook

Räknedosa, utan instruktionsbok.

Inga anteckningar får förekomma i hjälpmedlen. Detta gäller även räknedosan.

Jourhavande lärare: Wilhelm Lenferink, tel. 285751

Besök av jourhavande lärare sker ungefär klockan 09:30 och 11:30.
Ring även gärna Bo Einarsson på 281432.

Övrigt

Sju uppgifter ger totalt 30 poäng. Poängen, som står i marginalen, ges för helt korrekta lösningar med motiveringar och delresultat.
För godkänt krävs 12 poäng.

Resultat anslås på Mai:s anslagstavla,
bv, ingång B23, senast den 1 november

Lycka till

1. Betrakta funktionen

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 4} - 2,$$

för $x \approx 0$.

(2 p) **a)** Antag $f(x)$ beräknas så att flyttalsoperationerna addition, subtraktion, upphöjt till och kvadratrot samtliga utförs med ett relativt fel som ej överstiger avrundningsenheten μ.

Visa att det relativa felet i f som orsakas av aritmetikens ändliga precision uppfyller

$$|\text{relativt fel i } f| \lesssim \mu \left(2 + \frac{12}{x^4}\right).$$

(2 p) **b)** Ge ett lämpligt uttryck för att beräkna $f(x)$ om $x \approx 0$.

2. Givet är tabellen

i	1	2	3	4
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	0	8	8	0

Vi söker en naturlig kubisk splinefunktion $s(x)$ som interpolerar tabellen.

(2 p) **a)** Ställ upp ekvationssystemet för $z_i = s''(x_i)$ enligt formlerna i formelsamlingen.

(2 p) **b)** Beräkna $s(0)$.

3. Givet är ekvationen

(1) $$2^x - 5x + 1 = 0.$$

Vi söker en rot x^* till (1).

(2 p) **a)** Vi approximerar x^* med sekantmetoden. Ta $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Beräkna x_2 och x_3. Ge en bra feluppskattning för felet i x_3, utan att faktiskt beräkna x^*.

(2 p) **b)** Sekantmetodens komplexitet domineras av beräkningen av funktionsvärdena $f(x_i)$. Antag vi utgår från x_0 och x_1, och beräknar $x_2, \ldots, x_N$, $N \geq 2$. Hur många funktionsvärden $f(x_i)$ skall beräknas?

4. En storhet A approximeras med ett numeriskt uttryck $U(x)$. Det gäller att

$$A \approx U(x) + C \cdot 0.8033\,(x\sqrt{x})^{-1}.$$

Ett experiment ger följande tabell.

x	2	4	6	8	10
$U(x)$	6.68	4.37	3.74	3.46	3.34

Vi använder minsta kvadratmetoden för att bestämma en approximation till A och C.

(2 p) **a)** Tabellen leder till ett överbestämt ekvationssystem för de obekanta A och C. Ställ upp det ekvationssystemet.

och C.

(4 p) **5.** Följande tabell med funktionsvärden är given.

x	$f(x)$
0.90	0.83
0.91	0.85
0.92	0.86
0.93	0.88
0.94	0.89
0.95	0.91
0.96	0.93
0.97	0.94
0.98	0.96
0.99	0.98

x	$f(x)$
1.00	1.00
1.01	1.03
1.02	1.04
1.03	1.06
1.04	1.09
1.05	1.11
1.06	1.14
1.07	1.16
1.08	1.19
1.09	1.22

.

Tabellvärdena för x är exakta och de för $f(x)$ har två korrekta decimaler.

Approximera $f'(1)$ med centrala differenskvoter och steglängd $h = 0.09$, $h = 0.03$ respektive $h = 0.01$. Använd upprepad Richardsonextrapolation för att få en bättre approximation till $f'(1)$.

Vilket av resultaten verkar mest trovärdigt? Vad är den matematiska bakgrunden till detta?

6. Vi vill beräkna

$$I = \int_0^2 \frac{\exp(-x)}{\sqrt{2-x}} dx.$$

(2 p) **a)** Formulera problemet så att en approximation T till I kan beräknas med den sammansatta trapetsregeln.

(2 p) **b)** Hur många delintervall behövs i den sammansatta trapetsregeln (utan Richardsonextrapolation) för att garantera att $|T - I| < 0.05$? Räcker det med 10 delintervall?

7. Givet är begynnelsevärdesproblemet

$$y'(x) = f(x, y(x)) = -2y(x) + 6x^2 + 1, \qquad x \geq 1,$$
$$y(1) = 2.$$

(2 p) **a)** Approximera $y(2)$ med den klassiska Runge-Kutta metoden. Välj steglängden $h = 1$.

(2 p) **b)** Vi använder två numeriska metoder för att beräkna en approximation y_{num} till $y(2)$. Vi väljer först steglängden $h = 0.1$. Vid Eulers metod blir absoluta felet ≈ 0.13. Vid den klassiska Runge-Kutta metoden blir absoluta felet $\approx 2.4 \cdot 10^{-5}$.

Vi söker nu en approximation till $y(2)$ så att $|y_{\text{num}} - y(2)| < 0.5 \cdot 10^{-6}$. Uppskatta den största steglängden som kan användas i Eulers respektive Runge-Kuttas metod.

(1 p) **c)** Beräkningarnas komplexitet domineras av funktionsberäkningarna $f(x, y(x))$. Använder vi den största tillåtna steglängden h från b), hur många sådana funktionsberäkningar krävs då för att beräkna y_{num} med Eulers, respektive Runge-Kuttas metod?