Vektornorm

För att studera inverkan från mätfel och avrundningsfel behöver vi en **vektornorm**. En sådan måste uppfylla:

$$\| x \| \geq 0 \quad \text{för alla } x$$

$$\| x \| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$$

$$\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$$

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

Tre vanliga vektornormer för vektorn $\{x_i\}_{,\, i=1,\ldots,n}$ är

1−normen (ibland kallad *Manhattan*−normen)

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2−normen (oftast kallad *Euklidiska* normen)

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

∞ −normen (oftast kallad *Maximum*−normen)

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

För godtyckligt $p \geq 1$ kan man sammanfatta med

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

För vektornormer kan man visa att $\| x \|_1 \geq \| x \|_2 \geq \| x \|_\infty$.

Matrisnorm

Vi behöver även en **matrisnorm**. Denna införes utgående från någon vektornorm:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Man kan visa att den uppfyller:

$$\|A\| \geq 0 \quad \text{för alla } A$$

$$\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

samt att den uppfyller:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\|A\| = \max_{\|x\| = 1} \|Ax\|$$

2−normen för en matris är ganska svår att räkna ut, men ∞ −normen är enkel

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

dvs maximala radsumman.

För matrisnormer gäller inte motsvarande olikhet mellan de olika normerna som vid vektornormer.

Feluppskattning

Vid lösning av ett linjärt ekvationssystem är det tänkbart med fel i högerled och fel i matrisen. Vi tittar här bara på fel i högerledet. Vi har dels den exakta ekvationen

$$\mathrm{A}\,x = b$$

och dels den störda ekvationen

$$\mathrm{A}\,(x + \delta x) = b + \delta b$$

Enkla räkningar ger den ”dubbla” olikheten

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

eller

$$\frac{1}{\varkappa(A)} \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \varkappa(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

där konditionstalet $\varkappa$ definieras av

$$\varkappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

och som således anger vilken faktor det relativa felet i sämsta fall multipliceras med, eller i bästa fall divideras med. Det är lätt att visa att $\varkappa(\mathrm{A}) \geq 1$.

I formelsamlingen sidan 12 finns formeln då både matrisen och högerledet innehåller fel.