Tal 6 från TANA 39/40 Numeriska metoder för M och MX 1995-12-18

Problem

Randvärdesproblemet

$$-\frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{dy}{dx}\right)+y=x, \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=1,$$

skall lösas med bandmatrismetoden. Använd ekvidistant indelning med steget $h=1/N$, där N = 3.

Lösning

$x_0=0, \quad x_1=1/3, \quad x_2=2/3, \quad x_3=1, \quad y_0=0, \quad y_3=1$

För $n=1$ och $n=2$ erhålles i **Metod 1**

$$-\frac{(1+x_{n+1/2})\frac{y_{n+1}-y_n}{h}-(1+x_{n-1/2})\frac{y_n-y_{n-1}}{h}}{h}+y_n=x_n$$

Vid insättning fås, efter multiplikation med h^2,

$$-(1+\frac{1}{2})(y_2-y_1)+(1+\frac{1}{6})(y_1-0)+y_1(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^2$$

$$-(1+\frac{5}{6})(1-y_2)+(1+\frac{1}{2})(y_2-y_1)+y_2(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2$$

eller

$$\frac{25}{9}y_1-\frac{3}{2}y_2=\frac{1}{27}$$
$$-\frac{3}{2}y_1+\frac{31}{9}y_2=\frac{103}{54}$$

med lösningen $y_1=0,4084, y_2=0,7316$.

I stället för att krångla med dessa centrerade differenser kan man i **Metod 2** derivera den givna differentialektionen till

$$-(1+x)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=x$$

varvid man får ekvationerna

$$-(1+x_n)\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}-\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+y_n=x_n$$

Vid insättning fås, efter multiplikation med h^2,

$$-(1+\frac{1}{3})(y_2-2y_1+0)-\frac{1}{6}(y_2-0)+y_1(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^2$$

$$-(1+\frac{2}{3})(1-2y_2+y_1)-\frac{1}{6}(1-y_1)+y_2(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2$$

eller

$$\frac{25}{9}y_1-\frac{3}{2}y_2=\frac{1}{27}$$

$$-\frac{3}{2}y_1+\frac{31}{9}y_2=\frac{103}{54}$$

med lösningen $y_1=0,4084, y_2=0,7316$ som förut.

Man kan säga att metod 2 är den naturliga för denna kurs, och metod 1 för fortsättningskursen.