

Föreläsning 9

Bo Einarsson

Integralberäkning

En bestämd integral kan beräknas på flera sätt:

- a) Analytiskt
- b) Analytiskt med serieutveckling
- c) Med en modern räknare
- d) Med trapetsmetoden
- e) Med upprepad trapetsmetod (Rombergs metod)
- f) Med Newton-Côtes metod (trapets, Simpson, 3/8, . . .)
- g) Med Gauss metod
- h) Adaptivt

Vår standardmetod är upprepad trapetsmetod (Rombergs metod).

Vi tittar på ett exempel

$$I_1 = \int_1^3 \frac{100}{x^2} \sin\left(\frac{10}{x}\right) dx$$

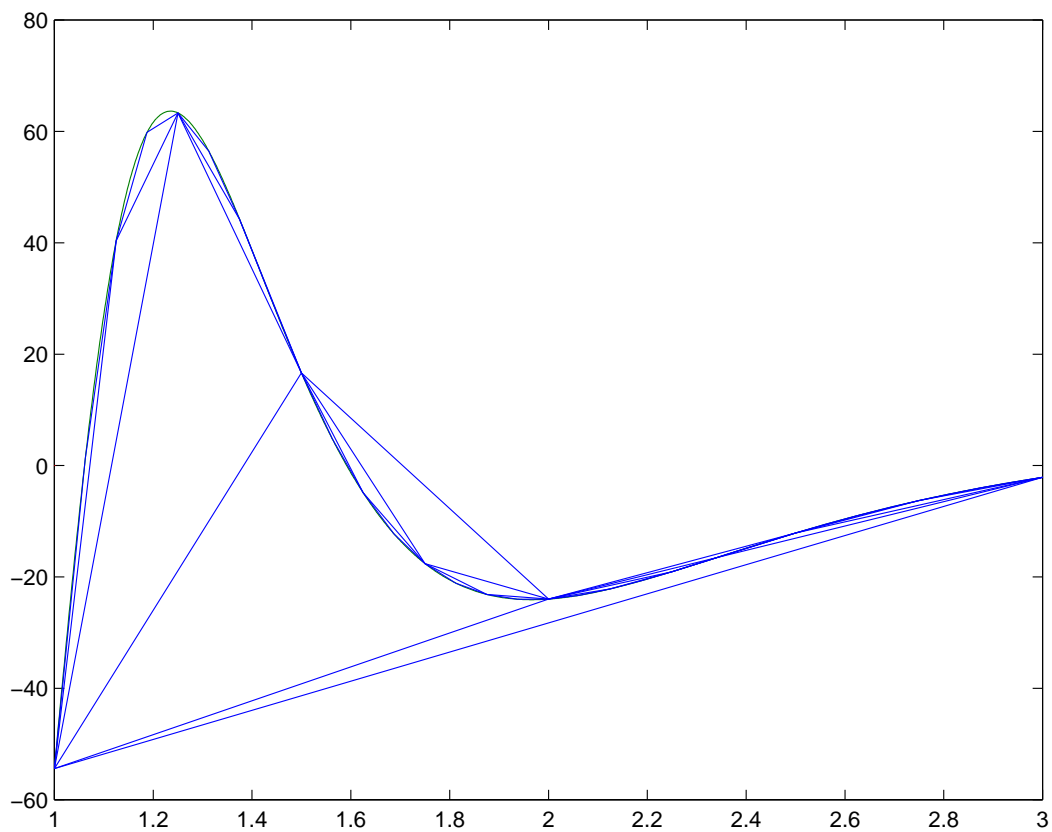
Med ett enkelt variabelbyte $t = 10/x$ erhålles i stället ett enkelt lösbart problem

$$\begin{aligned} I_2 &= 10 \int_{10/3}^{10} \sin t dt = \\ &= 10 [-\cos t]_{10/3}^{10} = -1,426025 \dots \end{aligned}$$

Vi tittar nu på hur Romberg fungerar på dessa båda problem.

I_1

```
>> romberg(1,3,0.5e-0)
Resultat:  -1.4264687800492
Antal funktionsber:  33
Uppskattat trunkeringsfel:  0.0957
2.000 -56.519
1.000 -52.233 -50.804
0.500 -23.856 -14.398 -11.970
0.250 -6.828 -1.152 -0.268 -0.083
0.125 -2.681 -1.299 -1.309 -1.326 -1.331
0.062 -1.733 -1.416 -1.424 -1.426 -1.426
                                           -1.4265
```



I_2

```
>> romberg(10/3,10,0.05)
```

```
Resultat: -1.42608459635151
```

```
Antal funktionsber: 17
```

```
Uppskattat trunkeringsfel: 0.0135
```

```
6.6667 -24.4863
```

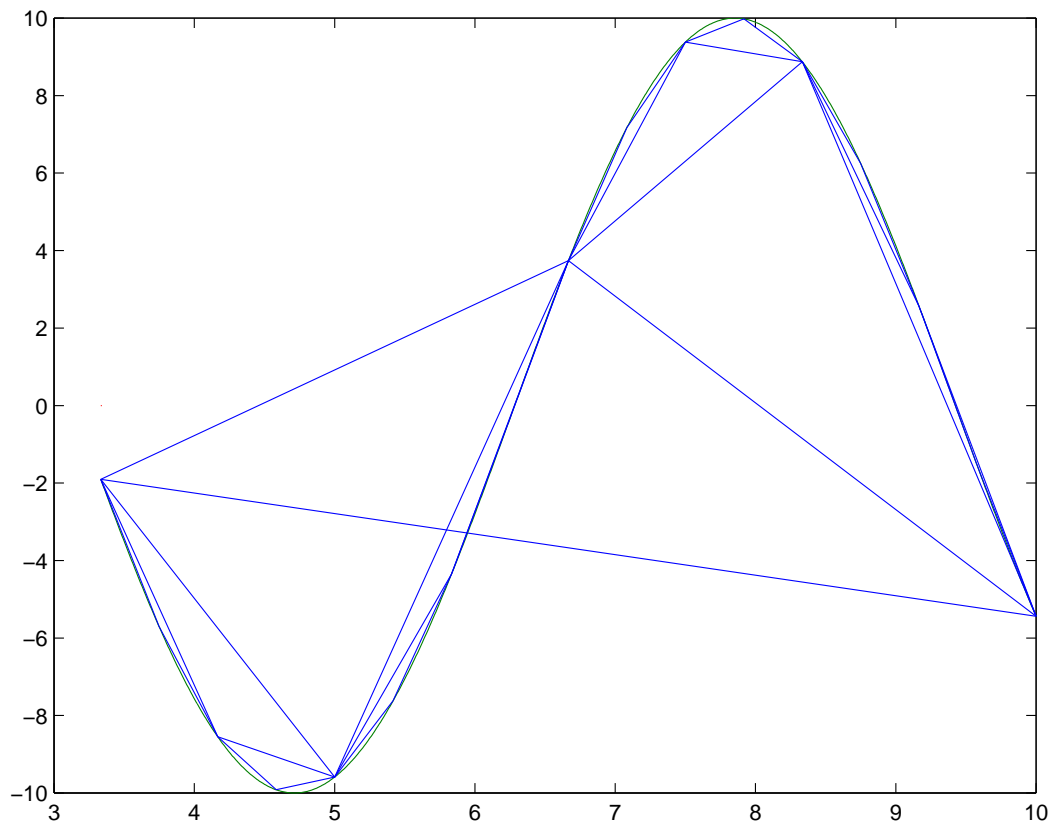
```
3.3333 +0.2286 +8.4668
```

```
1.6667 -1.0796 -1.5156 -2.1811
```

```
0.8333 -1.3425 -1.4302 -1.4245 -1.4125
```

```
0.4167 -1.4053 -1.4263 -1.4260 -1.4260
```

```
-1.4261
```



Besvärliga integraler

En integral anses besvärlig om den har en singularitet, till exempel division med noll i någon punkt (oftast en ändpunkt) eller har oändlig ändpunkt. Följande metoder kan då användas:

a) Variabelsubstitution

b) Partiell integration (oftast behövs flera steg för att få snabb konvergens)

c) Subtraktion av singulariteten (nästan ekvivalent med metod b))

d) Serierutveckling (fungerar bra för "små" ändpunkter)

e) Svans-kapning

Ibland måste man ta till en kombination av ovanstående metoder samt dela upp intervallet i ett par delområden med olika metoder i vart och ett. Ibland måste man till och med tänka på samplingsteoremet!