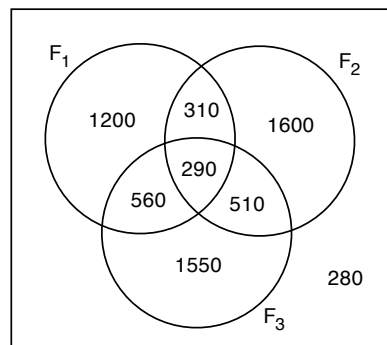


**Lösningar till tentamen**  
**764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp**  
**2012-01-09**

1. Vi använder ett venndiagram för att strukturera informationen i uppgiften. Med start inifrån och ut kan vi successivt räkna ut hur många personer som finns i varje område i venndiagrammet. Vi får resultatet intill och kan nu besvara frågorna genom att läsa av lämpliga områden.



- a) Att vara kund i mer än ett företag i koncernen innebär att man ligger i de områden där cirklarna överlappar varandra. Antalet blir  $310+290+560+510=1670$  stycken.
- b) Antalet som är kund i koncernen men inte hos någon av de tre nämnda företagen är det antal som ligger utanför cirklarna, det vill säga 280 st.

**Svar:** a) 1670 personer är kund hos mer än ett av de tre företagen.  
 b) 280 personer är kund hos koncernen men inte just i de tre företagen  $F_1, F_2, F_3$  (utan hos något annat företag i koncernen).

2. Vi använder en sanningsvärdestabell för att besvara frågorna.

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$S_1: p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$S_2: (p \wedge q) \vee r$	$S_1 \leftrightarrow S_2$	$S_1 \rightarrow S_2$	$S_2 \rightarrow S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

$S_1$  är ej ekvivalent med  $S_2$  då  $S_1 \leftrightarrow S_2$  ej är en tautologi enligt ovanstående sanningsvärdestabell. Inte heller  $S_2 \rightarrow S_1$  är en tautologi, så  $S_1$  är inte en konsekvens av  $S_2$ .  $S_1 \rightarrow S_2$  är dock en tautologi, så  $S_2$  är en logisk konsekvens av  $S_1$ .

**Svar:**  $S_1$  och  $S_2$  är inte logiskt ekvivalenta, men  $S_2$  är en konsekvens av  $S_1$ .

3. Vi delar upp problemet i två fall:

I) Cecilia och Moa är med och arrangerar vårutflykt:

Det finns då 10 personer att välja bland för att hitta en tredje person. Totalt alltså 10 sätt att välja Cecilia, Moa och en tredje person.

II) Cecilia och Moa är inte med och arrangerar vårutflykt:

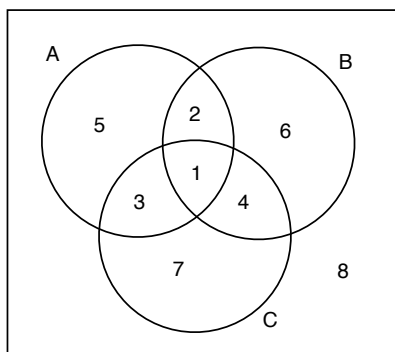
Då finns det 10 personer bland vilka vi ska välja 3 utan inbördes ordning, vilket ger  $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ .

Totalt  $120 + 10 = 130$  olika sätt att välja en grupp om tre som arrangerar vårutflykt.

**Svar:** Med givna villkor kan gruppen om 3 väljas ut på 130 olika sätt bland de 12.

4. Båda likheterna gäller för alla mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$  och bevisas nedan.

a)  $A \cap (B \setminus C)^c = (B^c \cap A) \cup (A \cap C)$



VL:

$A$ : 1,2,3,5

$B$ : 1,2,4,6

$C$ : 1,3,4,7

$B \setminus C$ : 2,6

$(B \setminus C)^c$ : 1,3,4,5,7,8

$VL = A \cap (B \setminus C)^c$ : 1,3,5

HL:

$A$ : 1,2,3,5

$B$ : 1,2,4,6

$C$ : 1,3,4,7

$B^c$ : 3,5,7,8

$B^c \cap A$ : 3,5

$A \cap C$ : 1,3

$HL = (B^c \cap A) \cup (A \cap C)$ : 1,3,5

Då vänster- och högerled svarar mot samma områden ovan gäller likheten för alla mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$ .

b)  $A^c \cap (B \cup C) = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap C)$

Likheten gäller enligt distributiva lagen. (Med  $A^c$  ersatt med  $A$  så är detta precis en av de lagarna.) Det räcker alltså här att hänvisa till den. Kan naturligtvis också visas med numererat venndiagram på motsvarande sätt som i a).

**Svar:** Se ovan.

5. Låt  $p$ : "Jag missar bussen",  $q$ : "Jag köper fika i Baljan",  $r$ : "Jag blir glad".  
Slutledningen får då formen:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

Detta är precis syllogismlagen och vi visar att denna slutledning är korrekt med en kort deduktion:

- 1.)  $p \rightarrow q$       Förutsättning
- 2.)  $q \rightarrow r$       Förutsättning
- 3.)  $p \rightarrow r$       1.), 2.) och syllogismlagen.

$p \rightarrow r$ : "Om jag missar bussen så blir jag glad" är alltså en korrekt slutsats ur förutsättningarna. (Det kan tyckas strida mot förnuftet. Ibland räcker det ju inte med ett fika för att bli glad, men sådana var förutsättningarna här.)

**Svar:** Se ovan.

6. Vi har 1 nod av grad 8, 2 noder av grad 3, 22 noder av grad 1 (löv) och  $x$  stycken noder av grad 4.

$$\text{Antalet noder är alltså: } N = 1 + 2 + 22 + x = 25 + x. \quad (1)$$

Enligt handskaningslemmat är summan av gradtalen alltid två gånger antalet bågar ( $B$ ) så

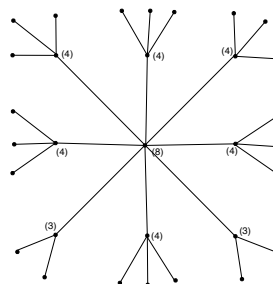
$$2 \cdot B = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + x \cdot 4 = 36 + 4x \Leftrightarrow B = \frac{36+4x}{2}. \quad (2)$$

Då Grafen är ett träd gäller ju att  $N = B + 1$ . Med uttryck (1) och (2) ovan insatt i detta samband får vi:

$$N = B + 1 \Leftrightarrow 25 + x = \frac{36+4x}{2} + 1 \Leftrightarrow 24 + x = \frac{36+4x}{2} \Leftrightarrow$$

$$48 + 2x = 36 + 4x \Leftrightarrow 12 = 2x \Leftrightarrow 6 = x.$$

6 noder av grad 4 uppfyller nödvändiga villkor och grafen kan till exempel se ut som figuren intill visar. Siffror i parantes anger gradtal hos noder som inte är löv.



**Svar:** Antalet noder av grad 4 är 6 stycken.

7. Låt  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

a) Inför relationen "lika med" på  $A$ , det vill säga  $x\mathcal{R}_1y$  om  $x = y$  för  $x, y \in A$ .

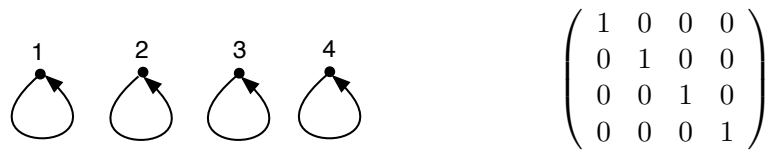
$\mathcal{R}_1$  är reflexiv eftersom  $x = x$  för alla  $x \in A$ .

$\mathcal{R}_1$  är symmetrisk för om  $x = y$  så är även  $y = x$  för alla element i  $A$ .

$\mathcal{R}_1$  är antisymmetrisk. Enligt definitionen är  $\mathcal{R}_1$  antisymmetrisk om  $x = y$  och  $x \neq y \Rightarrow x \neq y$ . Denna implikation blir sann genom att  $x = y$  och  $x \neq y$  aldrig uppfylls.

$\mathcal{R}_1$  är transitiv eftersom om  $x = y$  och  $y = z$  så gäller ju att  $x = z$  för alla  $x, y, z$  i  $A$ .

Relationsgraf och relationsmatris ser ut enligt nedan:



b) Med  $A$  som tidigare uppfyller följande relation kraven:

$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

Den är ej en ekvivalensrelation då den inte är reflexiv. Relationsgrafens saknar ju de bågar som utgör öglor då det bara finns bågar ”mellan par av olika noder”, enligt uppgift. Frågan om ekvivalensklasser är därmed inte relevant.

**Svar:** Se ovan.