.I Lineär algebra och differentialekvationer.

Detta dokument är ett försök att motivera några av lineära algebrans begrepp och tekniker, med hjälp av en tillämpning. Läsningen kräver vissa förkunskaper. Eftersom vi anknyter till differentialekvationer måste du veta vad derivator är; du måste även känna till några standardderivator och räkneregler.

Du måste även veta det enklaste om räkning med komplexa tal.

För förståelsen är det viktigt att du inte hakar upp dig på detaljer. Denna text ska läsas som man läser matematisk text överhuvudtaget. Inte en rad i sänder, utan mer övergripande först, för att se hur den går, detaljer först sedan.

.I.1 Om differentialekvationer

Ett av de viktigaste modelleringsverktygen inom matematikens tillämpningar är *differentialekvationer*. Man vill studera hur vissa tillstånd, t ex lägen och hastigheter i ett svängande partikelsystem, förändras med tiden. Ofta kan man härleda samband mellan de sökta funktionerna och deras derivator. Att ur ett sådant samband, ett *differentialsystem*, ta fram funktionerna själva är att *lösa* systemet.

Ofta bestäms utvecklingen av ett fåtal data vid en viss tidpunkt, begynnelsevärden. Det är väsentligt att se hur lösningarna beror på dessa data, om det finns lösningar till alla tänkbara data och hur mycket man behöver veta för att bestämma lösningen entydigt.

Vi måste börja med det allra enklaste, ett samband där endast en okänd funktion ingår. Du kan hoppa över entydighetsfrågorna om du är angelägen att komma fort till saken.

.I.2 Ekvationen $y'(t) = ay(t)$, a reellt.

Rubrikens funktion, $y(t)$, är den sökta.

Variabeln betecknas med t som i “tid” (time, temps). I regel ska vi anta att allt börjar vid en bestämd tid, som vi sätter till noll. Ekvationen ska alltså gälla för alla värden $t \geq 0$.

I ekvationen förutsätter vi tills vidare att konstanten a är reell. Derivatan $y'(t)$ betyder, som bekant, en tillväxthastighet. Sambandet $y'(t) = ay(t)$ innebär att denna hastighet är proportionell mot $y(t)$ självt.

Det kan vara ett lämpligt antagande om $y(t)$ betecknar befolkningsmängden i ett land (här idealiserar vi; befolkningstalet antar ju bara heltalsvärden); tillväxten kan antas vara proportionellt mot antalet männsikor som kan göra något åt saken (fundera gärna kritiskt på komplikationerna i den modellen).

Proportionalitet är det enklaste fallet av *linearitet*, som vi ska diskutera senare.

a är i detta fall positivt. Ett exempel med negativt a är radioaktivt sönderfall.

Så mycket kan fastställas utan vidare: systemet satisifieras av $y(t) = C \cdot e^{at}$. Det ser du genom att sätta in detta uttryck i ekvationens båda led. Exponentialfunktionen har uppfunnits för just detta ändamål: att lösa den mest fundamentala av alla differentialekvationer. När vi deriverar e^{at} får vi tillbaka samma funktion multiplicerad med a. Vi säger att denna funktion är en *egenfunktion* till derivationsoperatorn.

Olika värden på konstanten C ger olika lösningsfunktioner. Konstanten C ger den ytterst trivala lösningen $y(t) \equiv 0$ ("y identiskt lika med noll"). Lösningarna till olika värden på C skils lätt från varandra genom *begynnelsevärdet* $y(0)$. För $y(t) = C \cdot e^{at}$ gäller $y(0) = C$!

Vi får alltså en lösning till varje värde på $y(0)$. Om man ritar graferna för alla de erhållna lösningarna kommer det att gå en lösning genom varje punkt på y–axeln. Man kan rentav visa att det går en lösningskurva genom varje punkt i xy–planet. Men det är iallafall berättigat att fråga om vi verkligen hittat *alla* lösningar. Vi visar som hastigast att det finns exakt en lösning till varje begynnelsevärde $y(0) = C$.

Låt $y(t)$ vara en lösning. Eftersom $e^{at} \neq 0$ för alla t kan vi skriva om: $y(t) = e^{at}z(t)$; där $z(t) = e^{-at}y(t)$ och $z(0) = y(0) = C$. Vi sätter in denna ansats i vår differentialekvation:

$$y'(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}z'(t) = ay(t) = ae^{at}z(t)$$

Efter multiplikation med e^{-at} ser vi då att $z'(t) = 0$, dvs. $z(t)$ är konstant. Denna konstant måste stämma med begynnelsevärdet $z(0) = C$, så $z(t) \equiv C$. Därmed är visat att $y(t)$ måste vara lika med Ce^{at}.

.I.3 Ekvationen $y'(t) = \alpha y(t)$, a komplext $= a + ib$

Det kan ju verka konstigt att tillåta en komplex konstant, när variabeln är reell. Meningen med detta klarnar när vi studerar ekvationer av ordning 2, alltså ekvationer där även $y''(t)$ ingår.

För en komplexvärd funktion $y(t) = u(t) + iv(t)$ definierar vi derivatan komponentvis:

$$y'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

Nu har man för länge sedan kommit på att definitionen

$$y(t) = e^{\alpha t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

ger en lösning till ekvationen $y'(t) = \alpha y(t)$. Produktlagen, och kända derivator, ger oss:

$$y'(t) = ae^{at}(\cos bt + i \sin bt) + e^{at}(-b \sin bt + ib \cos bt) =$$

$$(a + ib)e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

Denna lösning har begynnelsevärdet $y(0) = 1$. Vi får en lösning till det komplexa begyynnelsevärdet C genom multiplikation: $y(t) = C \cdot e^{\alpha t}$.

Frågan om entydighet avgörs på exakt samma sätt som i det reella fallet.

.I.4 Ekvationen $y''(t) + a^2 y(t) = 0$

Ekvationen i rubriken är det enklaste exemplet på en andra ordningens differentialekvation. Den har konstanta koefficienter, och vi antar $a \neq 0$ reell. y och y'' ingår *lineärt*, dvs. vänsterledet är ett förstagradsuttryck i dessa funktioner.

Ekvationen löses t ex av en pendel (vars ände är en partikel och vars arm är viktslös) vid små utslag. Skolfysiken visar detta ur ännu ett proportionalitetsantagande, *Hookes lag*.

Det är en enkel derivationsövning att kontrollera att $y(t) = \cos at, y(t) = \sin at$ är två lösningar till denna ekvation. Ekvationens enkla, lineära, struktur, gör att även varje $y(t) = A\cos at + B\sin at$ är en lösning.

Om du sätter in uttrycket i ekvationen ser du att vardera termen *för sig* bidrar noll.

Denna funktion är realdelen av

$$(A - iB)(\cos at + i\sin at) = (A - iB)e^{iat}$$

Även dess imaginärdel är en lösning.

Vi kan också verifiera direkt att hela det komplexvärda uttrycket satisifierar ekvationen. Samma linearitet som nyss garanterar då att real- och imaginärdel var för sig satisifierar ekvationen (det är förstås väsentligt att den har reella koefficienter).

Man kan i detta fall verifiera att det finns exakt en (komplexvärd) lösning till varje uppsättning (komplexa) begynnelsevärden $y(0) = C, y'(0) = D$. Reella begynnelsevärden ger reella lösningar, nämligen

$$y(t) = C\cos at + \frac{D}{a}\sin at$$

vilket du lätt kontrollerar.

Entydighet verifierar man bäst på komplex form, genom att ansätta

$$y(t) = e^{iat}z(t),$$

vilket leder till en första ordningens ekvation i $z'(t)$ (den nyfikne kontrollerar detta; det görs dock i detalj i Analys-kursen). Ur denna kan först $z'(t)$ lösas som förut, därpå följer en enkel integration.

.II Ett system

Ett system av differentialekvationer kan se ut såhär:

$$x_1''(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$$
$$x_2''(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$$

$x_1(t), x_2(t)$ är de sökta funktionerna. Ekvationerna innehåller både funktionerna själva och deras andraderivator. Systemet är lineärt och homogent, dvs. båda ekvationerna innehåller förstagradsuttryck i funktionerna och deras andraderivator, men inga bekanta termer.

Det skulle föra för långt att beskriva den fysikaliska modell (ett enkelt svängande system) som leder till detta system.

Låt det räcka med att x_1, x_2 beskriver lägen (avvikelser från ett viloläge) för två partiklar, förbundna med en fjäder mellan sig, och bägge fästa med en fjäder i varsin vägg.

En utredning, med bild, finns på sidan 92 i min fria bok Krypa-Gå; länkar finns från min hemsida http://www.mai.liu.se/$\sim$ pehac. Det handlar bland annat om att kraften på den vänstra partikeln beror på uttöjningen av dels den vänstraste fjädern $(-x_1(t))$, dels den mellersta $(-x_1 + x_2)$.

x_1 x_2

Att inga bekanta funktioner, eller förstaderivator, ingår, beror på att systemet inte drivs av pålagda krafter och att det är friktionsfritt. Dess lineära, homogena, struktur medför att systemet har en alldeles trivial lösning, nämligen båda funktionerna konstant lika med noll. Dvs. ingenting händer, partiklarna står still.

Givet de fysikaliska förutsättningarna är det naturligt att fråga efter enkla svängningar, t ex där båda funktionerna är trigonometriska funktioner med samma period (eller, ekvivalent, samma frekvens). Som nästan alltid blir behandlingen bekvämast om vi ansätter sådana svängningar på komplex form.

.II.1 Egensvängningarna.

Ansätt således

$$x_1(t) = C_1 e^{ait}, \quad x_2(t) = C_2 e^{ait}$$

där C_1, C_2 är sökta komplexa konstanter.

Vi observerar att $x_1''(t) = -C_1 a^2 e^{ait}$; $x_2''(t) = -C_2 a^2 e^{ait}$. Efter insättning i systemet kommer exponentialfaktorn att ingå i alla termer. Sedan vi strukit den erhåller vi ett vanlig lineärt ekvationssystem:

$$\begin{aligned} -C_1 a^2 &= -2C_1 + C_2 \\ -C_2 a^2 &= C_1 - 2C_2 \end{aligned}$$

i vilket vi flyttar allt till ett led:

$$\begin{aligned} (a^2 - 2)C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 + (a^2 - 2)C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Det visar sig nu, att för de flesta värden på a erhåller vi endast nollösningen $C_1 = C_2 = 0$. Undantagsvärdena på a ger oss systemets *egensvängningar*.

Multiplicera den första ekvationen (ledvis) med $a^2 - 2$, den andra med -1, och addera. C_2 försvinner då helt ur räkningarna och vi får kvar:

$$[(a^2 - 2)^2 - 1]C_1 = 0$$

Vi kan också göra oss av med C_1. Till den änden multiplicerar vi den första ekvationen med -1, den andra med $a^2 - 2$, och adderar. Kvar blir:

$$[(a^2 - 2)^2 - 1]C_2 = 0$$

Uttrycket $D = (a^2 - 2)^2 - 1$ kallas för systemets *determinant*. Dess värde har ett avgörande inflytande över lösningsstrukturen. Om $D \neq 0$ så får vi den redan kända triviala lösningen $C_1 = C_2 = 0$ som enda lösning. Den är fysikaliskt ointressant, som vi redan påpekat.

Genom att lösa ekvationen $D = (a^2 - 2)^2 - 1 = 0$ får vi de intressanta a–värdena:

$$\begin{aligned} (a^2 - 2)^2 &= 1 \\ a^2 - 2 &= \pm 1 \\ a^2 &= 3, a^2 = 1 \\ a &= \pm\sqrt{3}; a = \pm 1 \end{aligned}$$

Sätter vi in $a^2 = 1$ får vi följande urartade system:

$$\begin{aligned} -C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 - C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ekvationerna säger samma sak, $C_1 = C_2$! Vi kan alltså inte hitta någon entydig lösning. Vanligt är att man inför en neutral storhet, s, och uttrycker de båda obekanta i den, $C_1 = C_2 = s$. Varje (komplext) värde på s ger en lösning.

Insättning av $a^2 = 3$ ger oss $C_1 + C_2 = 0$. Vi sätter $C_2 = s$ och löser ut $C_1 = -s$.

Det första fallet ger oss alltså de komplexvärda lösningarna

$$x_1(t) = x_2(t) = se^{\pm it} = (A + iB)(\cos t \pm i \sin t) =$$

där A, B är reella.

Den lineära strukturen gör att realdel och imaginärdel var för sig satisifierar systemet. Efter att ha bakat in tecknet i konstanten B får vi alltså följande reellvärda lösningar:

$$x_1(t) = x_2(t) = A \cos t + B \sin t$$

Detta innebär att de båda partiklarna svänger med samma amplitud och frekvens och i samma fas.

Man vill ofta relatera en svängning till dess begynnelsetillstånd, där partiklarnas lägen och hastigheter är kända (vid tiden $t = 0$).

Här är

$$x_1(0) = x_2(0) = A; \qquad x_1'(0) = x_2'(0) = B$$

Denna speciella egensvängning är alltså möjlig endast om partiklarna vid tiden noll är förskjutna lika mycket från sitt viloläge, och har samma hastighet.

Det andra fallet ger oss, på samma sätt,

$$x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \sqrt{3}t + B \sin \sqrt{3}t$$

Partiklarna svänger nu i motfas, med samma amplitud och frekvens. Vi ser att

$$x_1(0) = -x_2(0) = A$$

och

$$x_1'(0) = -x_2'(0) = \sqrt{3} \cdot B$$

Vi får denna motfassvängning genom att dra isär partiklarna lika långt och lika fort åt varsitt håll och släppa dem.

.II.2 Vi lineärkombinerar!

Samma lineära struktur, som tillät oss att ta isär lösningar i real- och imaginärdel, tillåter oss att sätta ihop lösningar till nya lösningar.

För det första, om $x_1(t), x_2(t)$ är ett lösningspar till vårt system, och λ är ett reeellt tal, så är även $\lambda x_1(t), \lambda x_2(t)$ en lösning. Sätter vi in dessa uttryck istället för $x_1(t), x_2(t)$ i båda leden, så multipliceras dessa båda led med λ, så att likhet fortfarande gäller.

På samma sätt, om $x_1(t), x_2(t)$ och $y_1(t), y_2(t)$ är två lösningspar så är även $x_1(t) + y_1(t), x_2(t) + y_2(t)$ en lösning till systemet.

Vi har t ex:

$$(x_1(t) + y_1(t))'' = x_1(t)'' + y_1(t)'' =$$

$$= -2x_1(t) + x_2(t) - 2y_1(t) + y_2(t) = -2(x_1(t) + y_1(t)) + (x_2(t) + y_2(t))$$

Det är två saker som kommer in. Den ena, att funktioner och andraderivator ingår lineärt, till grad ett; den andra att derivator (och andra derivator) har ett enkelt förhållande till summor och talfaktorer. Derivatan av en summa är summan av derivatorna; och vi får bryta ut talfaktorer ur derivator. Dessa båda egenskaper uttrycks också med ordet “linearitet”.

Vi ska omsider vänja oss vid att inte tänka på linearitet som formen för ett uttryck, utan som en *egenskap*.

Kombinerar vi de båda citerade egenskaperna kan vi säga ännu mer:

Om $x_1(t), x_2(t)$ och $y_1(t), y_2(t)$ är två lösningspar, och om λ, μ är reella konstanter så är även $\lambda x_1(t) + \mu y_1(t), \lambda x_2(t) + \mu y_2(t)$ en lösning till systemet.

Denna nya lösning kallar vi för en *lineärkombination* av de båda givna lösningarna.

Vi känner redan två egensvängningar. Vi vill nu veta vad vi kan uppnå genom att lineärkombinera dem. Det är på tiden att införa en bekväm räkneformalism, *matriser*.

.II.3 Matriser.

Matriser är rektangulära talscheman. Matrisens *format*, talparet m/n, är antalet rader resp. antalet kolonner (spalter) i schemat.

Följande är 1/2- och 1/3-matriser, vardera med en enda rad och två, resp. tre spalter:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$$

Talen a, b, resp. p, q, r är matrisernas *element*.

Matriser med en enda rad kallas radmatriser. Följande är två kolonnmatriser, av format 2/1, 3/1, alltså med två resp. tre rader, och en enda kolonn:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Jag ger nu exempel på en 2/2- och en 2/3-matris, båda med två rader, den första med två kolonner, den andra med tre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Man kan definiera flera räkneoperationer. Att multiplicera en matris med ett tal innebär (definitionsmässigt) att man multiplicerar alla dess element med talet. Man kan även addera två matriser om de har samma format, genom att man adderar elementen på motsvarande platser.

En *lineärkombination* av två matriser kan se ut såhär:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 & + & \mu \cdot (-1) \\ \lambda \cdot 2 & + & \mu \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Mer intrikat är multiplikationen av matriser med varandra. Vi kan multiplicera en rad med en kolonn om och endast om de är lika långa. För matriser av format $1/3$ och $3/1$ lyder definitionen såhär:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = ap + bq + cr$$

som ibland ska uppfattas som en $1/1$-matris, men oftare som ett tal. Om den första matrisen har flera rader av längd n, dvs. är av format m/n och den andra har flera kolonner av samma längd n, dvs. är av format n/p, så erhåller man (definitionsmässigt) produkten genom att multiplicera varje rad i den första faktorn med varje kolonn i den andra. Produkten får format m/p. T ex:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq + cr \\ dp + eq + fr \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq + cr & as + bt + cu \\ dp + eq + fr & ds + et + fu \end{pmatrix}$$

De viktigaste situationerna är när den första faktorn är n/n, med lika många rader som kolonner, och den andra antingen har samma format som den första, eller formatet $n/1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2 \\ \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vilket är en lineärkombination av den första matrisens kolonner.

Ett ekvationssystem skrivs ofta bekvämast på matrisform. Följande system:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= a_1 \\ x_1 - 2x_2 &= a_2 \end{aligned}$$

kan också skrivas såhär:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

eller såhär:

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Det sista skrivsättet innebär att man vill skriva den givna högerledsmatrisen som lineärkombination av de båda kända kolonnerna. Den som vet lite om geometriska vektorer inser kanske att detta kan tolkas som en komposantupplösning av en given vektor i två givna riktningar.

Väsentligt för att kunna hantera matriser är räknelagen $(AB)C = A(BC)$. Här är A, B, C, matriser av formaten $m/n, n/p, p/q$ vilket garanterar att båda leden är definierade och av samma format ($=m/q$).

Matrisprodukter uppstår dels när vi tecknar lineära samband, dels när vi sätter in ett lineärt samband i ett annat:

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$
$$y_2 = cx_1 + dx_2$$

$$z_1 = py_1 + qy_2$$
$$z_2 = ry_1 + sy_2$$

blir på matrisform:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = AX; \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Z = PY$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; Z = PAX$$

.II.4 Systemet, dess lösningar och alla verifikationer, på matrisform

Vi visar först hur vårt system, och våra tidigare verifikationer, kan skrivas mer koncist på matrisform.

Själva systemet blir:

$$\begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Om vi inför beteckningarna

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad X''(t) = \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

blir formen denna:

$$X''(t) = AX(t),$$

en icke endast ytlig analogi till den skalära differentialekvationen $x''(t) = ax(t)$.

Den lineära struktur vi talat om tidigare yttrar sig i en egenskap hos matrismultiplikationen i högerledet. Det är lätt att verifiera att

$$A(X(t)+Y(t)) = AX(t)+AY(t); \qquad A(\lambda X(t)) = \lambda AX(t)$$

Denna egenskap går hand i hand med motsvarande egenskap hos andraderivationen.

Vi fann de komplexa lösningarna (som vi nu skriver på matrisform):

$$X(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad X(t) = e^{i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(eftersom $x_1 = x_2$ i det första fallet, $x_1 = -x_2$ i det senare) Verifikationen av den första lyder på matrisform:

$$X''(t) = i^2 e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X(t)$$

$$AX(t) = e^{it}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X(t)$$

Det första sambandet har vi redan uttryckt som att e^{it} är *egenfunktion* till andraderivatan (noggrannare: till operationen "derivation två gånger").

Det andra är ett matrissamband:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vid multiplikationen med A övergår kolonnen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i minus ett gånger sig själv.

Vi säger att denna kolonn, egensvängningens *amplitudvektor*, är en egenvektor till matrisen A (man kommer att behöva en precisare terminologi, men detta får räcka för stunden).

Den andra egensvängningen verifieras lika lätt:

$$X''(t) = (i\sqrt{3})^2 e^{i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3e^{i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3X(t)$$

$$AX(t) = e^{i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3e^{i\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3X(t)$$

Exponentialfaktorn är egenfunktion med egenvärdet -3 till andraderivationen. Dess amplitudvektor är egenvektor, med samma egenvärde, till matrismultiplikationen.

.II.5 Lösningar till givna begynnelsevärden.

Vi har redan tidigare konstaterat att varje lineärkombination av egensvängningarna också är en lösning. Vi känner alltså till följande lösningar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lambda e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu e^{i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där $\lambda = a - ib, \mu = c - id$ är givna komplexa konstanter.

Vi vill nu arbeta reellt och tar därför realdelen av ovanstående:

$$(a \cos t + b \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c \cos \sqrt{3}t + d \cos \sqrt{3}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det kan vara fysikaliskt intressant att avgöra om det finns lösningar till varje uppsättning begynnelsevärden, där alltså dels lägena $x_1(0) = \alpha_1, x_2(0) = \alpha_2$, dels hastigheterna $x_1'(0) = \beta_1, x_2'(0) = \beta_2$, är givna.

Vi sätter därför in $t = 0$ i de reella lösningarna och erhåller:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eftersom cosinustermerna är ett, och sinustermerna noll, för $t = 0$.

Här är α–na givna, a, c sökta. Detta är en av de matrisformer för ekvationssystem som vi tidigare skrivit upp. I klartext står:

$$a - c = \alpha_1$$
$$a + c = \alpha_2$$

Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra (och behåller den första) ser vi att detta är samma sak som:

$$a - c = \alpha_1$$
$$2c = -\alpha_1 + \alpha_2$$

(Detta är det enklaste exemplet på Gauß-elimination, som är bland det första man stöter på i en kurs i lineär algebra. Det är typiskt att de allra elementäraste idéerna kommer igen även i kursens mer avancerade skeden.)

Den sista ekvationen ger oss $c = \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2)$. Insättning av detta uttryck i den första ger $a = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Systemet är *entydigt lösbart*.

På samma sätt löser vi ut b, d entydigt. Derivation, följt av insättningen $t = 0$, ger oss denna gång:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som vi löser på ett likartat sätt. Inför vi $d' = d\sqrt{3}$ som ny obekant får vi rentav exakt samma lösningsstruktur som förut, alltså återigen entydig lösbarhet. Själva detta faktum intresserar oss just nu mer än lösningen.

Den som vet lite om geometriska vektorer ser att vi i båda fallen försökt att uttrycka en vektor som lineärkombination av vektorer med koordinaterna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs. att vi genomfört en lyckad komposantuppdelning. Den geometriska förklaringen till att detta går är att de båda vektorerna är *icke-parallella.* Den algebraiska förklaringen är att de båda kolonnmatriserna är icke-proportionella, dvs. den ena är inte ett tal gånger den andra.

.II.6 Entydighet.

Vi har nu alltså sett att vi genom att lineärkombinera egensvängningarna lyckas uppfylla varje uppsättning begynnelsevillkor (givna lägen och hastigheter). Men vi har hela tiden ansatt lösningarna på en speciell form. Frågan är förstås om det finns helt andra typer av lösningar som uppfyller dessa begynnelsedata.

För en fysiker är det kanske självklart att lägen och hastigheter vid viss tid bestämmer fortsättningen. Vi matematiker får lov att räkna.

Detta räknande underlättas om vi inte ansätter lösningarna på formen

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

utan på denna:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = y_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alltså som lineärkombination av egenvektorerna. Kan vi skriva godtyckliga konstanta 2/1–matriser som konstanta lineärkombinationer av dem, kan vi naturligtvis skriva variabla 2/1–matriser som variabla lineärkombinationer.

Mellan de sökta funktionerna $x_i(t)$, och hjälpfunktionerna $y_i(t)$ råder sambandet:

$$x_1(t) = y_1(t) - y_2(t)$$
$$x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

och, omvänt:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t))$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2}(-x_1(t) + x_2(t))$$

vilket du lätt kontrollerar.

(Vi utför därmed vad som kallas för ett basbyte för att “se bättre”)

Vi sätter in ansatsen i vårt system:

$$\text{vänster led} = \begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} = y_1''(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2''(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{höger led} = A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = y_1(t)A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2(t)A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där vi sedan utnyttjar att kolonnerna var egenvektorer till A:

$$A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -1 \cdot y_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + -3 \cdot y_2(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ska ha likhet mellan vänsterleden:

$$\begin{pmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

alltså även mellan högerleden:

$$y_1''(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2''(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot y_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + -3 \cdot y_2(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver om detta såhär:

$$(y_1''(t) + 1 \cdot y_1(t))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -(y_2''(t) + 3y_2''(t))\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Om vi läser av komponenterna ser vi att koefficienterna framför kolonnmatriserna ska vara lika med både plus och minus varandra. De måste alltså båda vara lika med noll:

$$y_1''(t) = -1 \cdot y_1(t)$$

$$y_2''(t) = -3 \cdot y_2(t)$$

Vår ansats har alltså kopplat isär ekvationerna så att endast en obekant funktion ingår i vardera.

I ett tidigare avsnitt har vi just löst den typen av ekvationer och lösningarna blev precis de sinus- och cosinus-funktioner som vi redan räknat fram; dvs. vi har redan hittat alla lösningar.

Speciellt innebär detta att det till varje uppsättning av begynnelsedata finns exakt ett lösningspar.

Egentligen är det två egenskaper hos våra båda amplitudvektorer som vi utnyttjat.

När vi ansatte lösningarna utgick vi från *lösbarhet*, att de sökta lösningarna verkligen gick att uttrycka som (variabla) lineärkombinationer av de båda kolonnerna. Denna egenskap uttrycks i algebrakursen med ordet "spänna upp"; de båda kolonnerna *spänner upp* vektorrummet av 2/1-matriser. Ett vektorrum är, förenklat uttryckt, en mängd där man kan bilda lineärkombinationer.

När vi identifierade koefficienter var det frågan om *entydighet* som var avgörande. Det är framförallt här som det omnämnda lineära oberoendet, frånvaron av proportionalitet, kommer in.

.III Tillbakablick

Vi ser tillbaka på vilka begrepp och tekniker som vi hittills motiverat.

.III.1 Lösning av ekvationssystem

Vi har ideligen letts till att lösa lineära ekvationssystem. Frågan om lösningsstrukturen har också uppstått. I II.1. Vi ville veta om ett system enbart hade den väntade noll-lösningen, eller om det hade flera. Här uppstod frågan om *entydighet*.

I II.5. ville vi bestämma lösningar till givna begynnelsevärden. Detta ledde oss också till att ställa upp lineära ekvationssystem. Nu var det *lösbarheten*, existensen av lösningar, som var väsentlig för oss.

.III.2 Determinanter

Vi har snuddat vid begreppet *determinant*. Determinanten till ekvationssystemet

$$ax_1 + bx_2 = p$$
$$cx_1 + dx_2 = q$$

är talet

$$D = ad - bc$$

I II.1. (där högerleden var $= 0$) såg vi att determinanten måste vara lika med noll för att vi skulle få intressanta lösningar. Allmänt kan man visa att systemet (oberoende av högerled) är entydigt lösbart om och endast om dess determinant $\neq 0$.

Är determinanten lika med noll beror lösningsmängden på högerleden. Systemet kan beroende på dessa ha antingen ingen eller oändligt många lösningar. När högerleden är noll kan bara det senare inträffa.

Determinanten kan generaliseras till allmänna lineära system med lika många ekvationer som obekanta. Samma kriterier kan formuleras i det allmännare fallet.

Frågan om lösningars existens och entydighet avgörs emellertid oftast bekvämast genom ett lösningsförfarande som kallas Gauß-elimination. Determinanten har huvudsakligen teoretisk nytta. Det är till exempel med dess hjälp man enklast visar att ett svängande partikelsystem med n partiklar har högst n egenfrekvenser.

.III.3 Matriser

Matriser ger ett överskådligt sätt att skriva upp lineära samband.

T ex verifikationen av egensvängningar, samt resultatet av lineärkombination av dessa, blev överskådligast på matrisform.

När vi studerade entydighet gjorde vi ett funktionsbyte:

$$x_1(t) = y_1(t) - y_2(t)$$
$$x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

och, omvänt:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t))$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2}(-x_1(t) + x_2(t))$$

På matrisform blir detta:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

resp.

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

När två 2/2–matriser uttrycker ett direkt samband och dess omvändning är de *inverser* till varandra:

$$TU = UT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

där *enhetsmatrisen* E har egenskapen $EX = XE = X$ närhelst produkterna finns. Det är inget märkligt med talet 2, allt kan generaliseras till högre format. Det är tydligen intressant att veta när matriser har invers, dvs. när lineära samband kan *lösas*. Även här dyker determinanterna upp.

Kolonnmatriser och manipulationer med dessa (lineärkombinationer) kan ofta illustreras geometriskt; t ex när vi lineärkombinerar egensvängningar för att erhålla önskade begynnelsevärden finns en stark analogi med komposantupplösningar av vektorer.

En stor del av lineära algebrans begrepp tar sats i analogier med geometriska fenomen, vilket inspirerar intelligenta gissningar om resultaten och gör det lättare att komma ihåg dem. Det är det viktigaste skälet att kurser i lineär algebra ofta börjar med geometri i två och tre dimensioner.

.III.4 Dimension.

Vårt svängande system hade följande lösningar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + D \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Varje lösning är lineärkombination av fyra speciella lösningar.

Vi behöver alla fyra. De tre sista räcker inte för att beskriva alla lösningar; vi kan t ex inte skriva den första som lineärkombination av de övriga. Försök:

$$\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \lambda \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tecknet '$\equiv$' uttrycker likhet mellan *funktioner*, dvs. likhet ska råda för alla t (eller snarare alla positiva t) samtidigt som λ, μ, ν är konstanter. Vi får en orimlighet genom att sätta in $t = \pi/2$. Då blir nämligen vänsterledet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ett tal gånger $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket är omöjligt.

Man kan visa mer, t ex att *ingen* mängd med tre lösningar räcker för att beskriva hela lösningsmängden. Och att av fem lösningar alltid någon är överflödig för beskrivningen. Ur detta kan man tillsitt visa att *varje* ändlig mängd som precis räcker till att (därtill entydigt) beskriva hela lösningmängden måste bestå av fyra lösningar.

Vi säger att "lösningsrummet har dimension 4" Dimensionstalet anger antalet "frihetsgrader". Vi kan lägga upp till fyra (lineära) tvång på lösningarna, t ex som förut fyra begynnelsevärden, och erhålla lösningar. För varje tillfört tvång tappar vi lösningar ("dimensionen sjunker"), men fyra tvång är precis vad vi klarar av (om inget av villkoren kan härledas ur de övriga).

Vi behöver förstås precisera begreppen "beskriva" ("spänna upp"), samt entydigheten, att inget villkor kan härledas ur övriga och ingen lösning uttryckas i de övriga ("lineärt obereoende"). Vidare behövs resultat som visar att dimensionsbegreppet är meningsfullt (lite mer om detta i det sista avsnittet). Denna abstrakta teori är en stor bit av den grundläggande lineära algebran.

.III.5 Linearitet.

Lineära algebran handlar om *linearitet*.

Formellt handlar den om lineära avbildningar mellan vektorrum, begrepp som vi diskuterar nedan. Behovet av allmännare definitioner infinner sig förr eller senare när man vill ha bekväma begrepp och beteckningar och tydligare se analogin mellan olika fenomen.

Vårt studium av differentialekvationer tog sats i linearitetsegenskaper. Dels hos andraderivatan:

$$(\lambda x(t))'' = \lambda x''(t)$$

$$(x(t) + y(t))'' = x(t)'' + y''(t)$$

Dels hos multiplikationen med systemmatrisen:

$$A(\lambda X) = \lambda AX$$

$$A(X + Y) = AX + AY$$

En konsekvens av lineariteten var en enkel struktur. Vi kunde t ex beskriva alla lösningar som (entydiga) lineärkombinationer av speciella lösningar, egensvängningarna.

Vi kunde arbeta komplext och sedan ta isär lösningarna i real- och imaginärdel.

Viktigast är kanske sambandet mellan lösningar och deras begynnelsevärden (i vårt exempel: två värden och förstaderivator vid tiden noll).

Om vi linärkombinerar två lösningar, dvs. multiplicerar dem med varsitt tal, och adderar, så gör vi givetvis detsamma med deras värden vid tiden noll, och med derivatorna (eftersom derivationen är lineär). Om vi tänker oss de fyra begynnelsevärdena uppställda som en matris av format 4/1 (en kolonnmatris) så har vid vad som kallas för en *lineär avbildning* från systemets lösningsmängd till mängden av 4/1-matriser.

Dessa båda mängder är *vektorrum*. Vektorrum är mängder där man definierat en addtionsoperation och en multiplikation med tal (så att vi kan lineärkombinera element) sådana att ett antal räknelagar är uppfyllda (nämligen de lagar som garanterar att man räknar rätt utan att tänka). Vår lösningsmängd, och mängden av 4/1-matriser, (kallat $\mathbf{R}^4$ är exempel på sådana vektorrum.

Avbildningen vi just definierade är därtill *bijektiv*, dvs. två olika lösningar kan inte ha samma fyra begynnelsevärden, och det *finns* verkligen lösningar till varje uppsättning av fyra sådana värden. Det betyder att mycket av det som gäller i det elementärare rummet $\mathbf{R}^4$ också är sant i vårt lösningsrum.

T ex: att man behöver minst fyra element för att beskriva alla element i $\mathbf{R}^4$ (som lineärkombinationer) och att minst ett av fem givna element är överflödigt för beskrivningen. I $\mathbf{R}^4$ är dessa fakta elementära konsekvenser av lösningsstrukturen för lineära ekvationssystem och i så måtto konkreta.

De *mest konkreta* exemplen på vektorrum och lineära avbildningar (för den som känner till detta) är mängden av geometriska vektorer och sådana geometriska konstruktioner som ortogonalprojektioner och vridningar. Däremot är dessa exempel inte helt elementära eftersom de bygger på kunskaper om kongruenta och likformiga trianglar.