Vi kan nu göra precis som för skalärprodukten (jämför (1.6.2))

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3)\times(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) = \\
&= x_1y_1\underbrace{(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{0}} + x_1y_2\underbrace{(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{e}_3} + x_1y_3\underbrace{(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3)}_{=-\mathbf{e}_2} + \\
&+ x_2y_1\underbrace{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1)}_{=-\mathbf{e}_3} + x_2y_2\underbrace{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{0}} + x_2y_3\underbrace{(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{e}_1} + \\
&+ x_3y_1\underbrace{(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{e}_2} + x_3y_2\underbrace{(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2)}_{=-\mathbf{e}_1} + x_3y_3\underbrace{(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{0}} = \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2\\ x_3y_1 - x_1y_3\\ x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Denna formel är lite väl komplicerad för att försöka lära sig utantill. Här behövs en minnesregel för att komma ihåg strukturen. Nedan illustreras en (av många), se (1.6.4): skriv upp vektorerna på koordinatform, skriv 1:a och 2:a koordinaten under respektive koordinatmatris, börja på mitten och betrakta det *första* korsande pilparet, multiplicera ihop elementen som förbinds av pilen riktad snett nedåt höger, gör detsamma med elementen som förbinds av pilen riktad snett uppåt höger, beräkna skillnaden mellan dessa produkter (tänk att pilen snett uppåt höger ger ett minustecken) och vi har fått *första* koordinaten i vektorprodukten. Gör likadant med de andra två pilparen.

$$
\begin{array}{c} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\end{matrix} \end{array}
\times
\begin{array}{c} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \\ \begin{matrix} y_1\\ y_2\end{matrix} \end{array}
= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2\\ x_3y_1 - x_1y_3\\ x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix} \tag{1.6.4}
$$

Exempel 1.6.3. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$. För att illustrera några av de grundläggande egenskaperna hos skalär- och vektorprodukten samt hur vektorprodukten beräknas skall vi först räkna ut $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ och sedan via skalärprodukterna visa att $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

$$
\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{array}{c} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1\\ 2\end{matrix} \end{array} \times \begin{array}{c} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 4\\ 5\end{matrix} \end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2{\cdot}6 - 3{\cdot}5\\ 3{\cdot}4 - 1{\cdot}6\\ 1{\cdot}5 - 2{\cdot}4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3\\ 6\\ -3\end{pmatrix},
$$

$$
(\mathbf{u}|\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\middle|\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3\\ 6\\ -3\end{pmatrix}\right) = 1{\cdot}(-3) + 2{\cdot}6 + 3{\cdot}(-3) = -3 + 12 - 9 = 0,
$$

$$
(\mathbf{v}|\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}\middle|\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3\\ 6\\ -3\end{pmatrix}\right) = 4{\cdot}(-3) + 5{\cdot}6 + 6{\cdot}(-3) = -12 + 30 - 18 = 0.
$$